

## ВОДОПОСТАЧАННЯ ТА ВОДОВІДВЕДЕННЯ

УДК 517.95

**Климюк Ю. Є., к.т.н., доцент** (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне, E-mail: klimyuk@ukr.net)

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДООЧИСТКИ ВОДИ ВІД ДОМІШОК У БАГАТОШАРОВОМУ ШВИДКОМУ ФІЛЬТРІ З ПОРИСТИМ ЗАВАНТАЖЕННЯМ**

Запропоновано математичну модель для прогнозування процесу доочистки води від домішок у багатошаровому швидкому фільтрі з кусково-однорідним пористим завантаженням, кожен шар якого характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, активної пористості і дифузії, при дотриманні сталої швидкості фільтрації. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі для фільтру, який має форму криволінійного паралелепіпеда, обмеженого двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділений деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Наведено результати числових розрахунків і здійснено їх аналіз.

**Ключові слова:** математична модель, багатошаровий фільтр, процес доочистки води, пористе завантаження.

**Вступ.** Значна частина технологій доочистки води від домішок базується на використанні швидких фільтрів із пористими завантаженнями [6]. Зростаюча вартість фільтруючих матеріалів вимагає проведення досліджень для їх більш якісного використання.

**Аналіз останніх досліджень.** Розробкою теоретичних основ очистки рідин від домішок шляхом їх фільтрування через пористі завантаження та подальшим її вдосконаленням займалося чимало вітчизняних і зарубіжних вчених [6; 8-10]. В якості математичної моделі процесу очистки рідини від домішок більшістю вітчизняних дослідників використовується модель Д. М. Мінца [5] при сталій швидкості фільтрації або деяка її модифікація (вдосконалена модель). У [3] запропоновано просторове узагальнення математичної моделі Д. М. Мінца, яка є більш ефективною для проведення теоретичних досліджень, націлених на оптимізацію параметрів процесу фільтру-

вання (часу захисної дії завантаження, розмірів фільтра тощо). У [4] вона вдосконалена шляхом введення додаткового рівняння для визначення зміни активної пористості завантаження вздовж висоти фільтра. Актуальною залишається задача побудови просторової математичної моделі для дослідження процесу доочистки води від домішок у багат шаровому швидкому фільтрі з кусково-однорідним пористим завантаженням.

**Методика досліджень.** Математичні моделі у [3; 4] описані нелінійними сингулярно-збуреними крайовими задачами (у моделях прийнято, що конвективні компоненти масоперенесення й адсорбції переважають над вкладом дифузійних процесів й десорбції) і розв'язуються з використанням числово-асимптотичних методів [1].

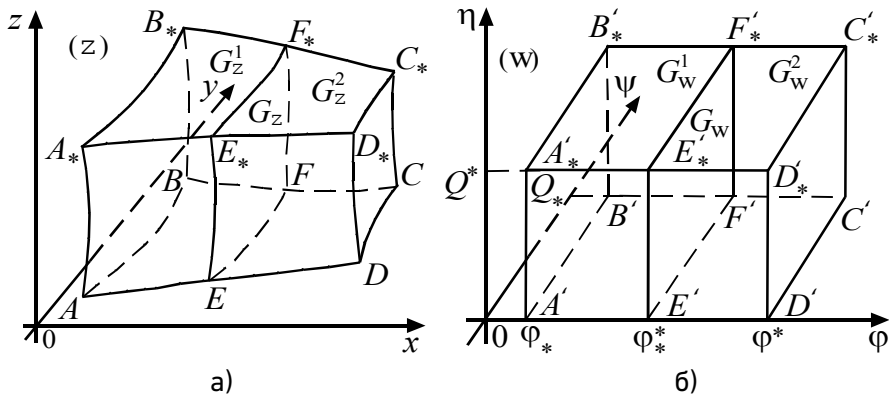


Рис. 1. Двошарова просторова область фільтрації  $G_z$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

**Постановка задачі.** Для області  $G = G_z \times (0, \infty)$  ( $z = (x, y, z)$ ),  $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$  – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома екіпотенціальними поверхнями  $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$  і чотирма поверхнями течії  $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$ ,  $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$  та розділений деякими заданими екіпотенціальними поверхнями  $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{z: f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) на деякі  $p$  підобластей  $G_z^1 = ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}$ ,  $G_z^s = E_s F_s F_{s+1} E_{s+1} E_{*s} F_{*s} F_{*s+1} E_{*s+1}$  ( $s = \overline{2, p-2}$ ),

$G_Z^p = E_{p-1}F_{p-1}CDE_{*p-1}F_{*p-1}C_*D_*$  (рис. 1, а), розглянемо модельну задачу:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\sigma \cdot (C + U))'_t = \text{div}(D \cdot \text{grad } C) - \vec{v} \cdot \text{grad } C, \\ (\sigma \cdot U)'_t = \alpha \cdot C - \beta \cdot U, \sigma'_t = -\gamma \cdot U, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi|_{ABB_*A_*} = \varphi_*, \varphi|_{CDD_*\tilde{N}_*} = \varphi^*, \varphi'_n|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (3)$$

$$C|_{ABB_*A_*} = c^*, C'_n|_{CDD_*C_*} = 0, C'_n|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (4)$$

$$C|_{t=0} = c_0^0, U|_{t=0} = u_0^0, \sigma|_{t=0} = \sigma_0^0, \quad (5)$$

$$\varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} = \varphi_{*s}^*,$$

$$\kappa_s \cdot \varphi'_n|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_n|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (6)$$

$$C|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = C|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, U|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = U|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}},$$

$$D_s \cdot C'_n - v_n^s \cdot C|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = D_{s+1} \cdot C'_n - v_n^s \cdot C|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}},$$

$$(\sigma \cdot (C + U))'_t|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = (\sigma \cdot (C + U))'_t|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (7)$$

де  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  і  $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації,  $\varphi_* < \varphi < \varphi^*$ ,  $0 < \varphi_* = \varphi_{*0}^* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*p-1}^* <$

$< \varphi_{*p}^* = \varphi^* < \infty$ ,  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$ ,  $\kappa$  – коефіцієнт фільтрації,  $\kappa = \{\kappa_s, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\kappa_s > 0$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні;  $C = C(x, y, z, t)$  і  $U = U(x, y, z, t)$  – відповідно концентрації домішок у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження;  $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$  – активна пористість,  $D$  – коефіцієнт дифузії,  $D = \{D_s, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $D_s = \varepsilon \cdot d_s$ ,  $d_s > 0$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\alpha$  і  $\beta$  – коефіцієнти, що характеризують обсяги адсорбованих і десорбованих за

одиницю часу домішок,  $\alpha = \{\alpha_s, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,

$\beta = \{\beta_s, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\beta_s = \varepsilon \cdot \bar{\beta}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\gamma$  – коефіцієнт, що характеризує швидкість зміни активної пористості,

що характеризує швидкість зміни активної пористості,

що характеризує швидкість зміни активної пористості,

що характеризує швидкість зміни активної пористості,

що характеризує швидкість зміни активної пористості,

що характеризує швидкість зміни активної пористості,

що характеризує швидкість зміни активної пористості,

що характеризує швидкість зміни активної пористості,

$\gamma = \left\{ \gamma_s, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $\gamma_s = \varepsilon \cdot \bar{\gamma}_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\alpha_s = \alpha_s(x, y, z, t)$ ,  
 $\bar{\beta}_s = \bar{\beta}_s(x, y, z, t)$  і  $\bar{\gamma}_s = \bar{\gamma}_s(x, y, z, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ) – неперервні обмежені функції,  $\varepsilon$  – малий параметр ( $\varepsilon > 0$ ),  $c_0^0 = \left\{ c_s^0, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  
 $u_0^0 = \left\{ u_s^0, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $\sigma_0^0 = \left\{ \sigma_s^0, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  
 $c_* = c_*(M, t)$ ,  $c_s^0 = c_s^0(x, y, z)$ ,  $u_s^0 = u_s^0(x, y, z)$  і  $\sigma_s^0 = \sigma_s^0(x, y, z)$  ( $s = \overline{1, p}$ ) – достатньо гладкі функції, перші дві з яких узгоджені між собою на ребрах області  $G$  [1],  $M \in ABB_*A_*$ ,  $v_n^s$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) – нормальні складові швидкості відповідно на поверхнях розділу  $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ).

Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжених із функцією  $\varphi(x, y, z)$ ) таких, що  $\kappa \cdot grad \varphi = grad \psi \times grad \eta$  [7] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови:  $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$ ,  $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$ ,  $\eta|_{ABCD} = 0$ ,  $\eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$ , задача (1), (3), (6) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області  $G_Z$  на область комплексного потенціалу – прямокутний паралелепіпед  $G_w = A'B'C'D'A_*B_*C_*D_*$ , який розділений поверхнями  $E'_s F'_s E'_{*s} F'_{*s}$  ( $s = \overline{1, p}$ ) на  $p$  підобластей  $G_w^1 = A'B'E'_1 F'_1 A_* B_* E'_{*1} F'_{*1}$ ,  $G_w^s = E'_s F'_s F'_{s+1} E'_{s+1} E'_{*s} F'_{*s} F'_{*s+1} E'_{*s+1}$  ( $s = \overline{2, p-2}$ ),  $G_w^p = E'_{p-1} F'_{p-1} C'D'E'_{*p-1} F'_{*p-1} C_* D_*$  (рис. 1 б), де  $G_w^s = \left\{ w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(s-1)}^* < \varphi < \varphi_{*s}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^* \right\}$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$  – невідомі параметри,  $Q = Q_* \cdot Q^*$  – повна фільтраційна витрата.

Припустимо, що ця задача є розв'язаною [1], зокрема, знайдено поле швидкостей  $\bar{v}$ , параметри  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$ ,  $Q$  та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \eta)$  у рівнянні (2) та умовах (4), (5), (7), отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області  $G_w \times (0, \infty)$ :

$$\begin{cases} (\tilde{\sigma} \cdot (c+u))'_t = D \cdot (b_1 \cdot c''_{\varphi\varphi} + b_2 \cdot c''_{\psi\psi} + b_3 \cdot c''_{\eta\eta} + b_4 \cdot c'_{\psi} + b_5 \cdot c'_{\eta}) - \\ - \kappa \cdot b_1 \cdot c'_{\varphi}, (\tilde{\sigma} \cdot u)'_t = \tilde{\alpha} \cdot c - \tilde{\beta} \cdot u, \tilde{\sigma}'_t = -\tilde{\gamma} \cdot u, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (8)$$

$$c|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_*, c'_{\varphi}|_{\varphi=\varphi_*} = 0, c'_{\psi}|_{\psi=0} = c'_{\psi}|_{\psi=Q_*} = c'_{\eta}|_{\eta=0} = c'_{\eta}|_{\eta=Q_*} = 0, \quad (9)$$

$$c|_{t=0} = \tilde{c}_0^0, u|_{t=0} = \tilde{u}_0^0, \tilde{\sigma}|_{t=0} = \tilde{\sigma}_0^0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} c &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} c, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} u = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} u, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (D_s \cdot c'_{\varphi} - \kappa_s \cdot c) &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (D_{s+1} \cdot c'_{\varphi} - \kappa_{s+1} \cdot c), \end{aligned}$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s-0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c+u))'_t = \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s+0}^*} (\tilde{\sigma} \cdot (c+u))'_t \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (11)$$

де  $c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t)$ ,

$u = u(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{c}_* = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t)$ ,

$\tilde{c}_0^0 = \{\tilde{c}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{u}_0^0 = \{\tilde{u}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,

$\tilde{\sigma}_0^0 = \{\tilde{\sigma}_s^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,

$\tilde{\beta} = \{\tilde{\beta}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\beta}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\beta}}_s \quad (s = \overline{1, p})$ ,

$\tilde{\gamma} = \{\tilde{\gamma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\gamma}_s = \varepsilon \cdot \tilde{\tilde{\gamma}}_s \quad (s = \overline{1, p})$ ,

$\tilde{c}_s^0 = \tilde{c}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $\tilde{u}_s^0 = \tilde{u}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $\tilde{\sigma}_s^0 = \tilde{\sigma}_s^0(\varphi, \psi, \eta)$ ,

$\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\beta}_s = \tilde{\beta}_s(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\gamma}_s = \tilde{\gamma}_s(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{1, p})$ ,

$\tilde{v} = \{\tilde{v}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{v}_s = \tilde{v}_s(\varphi, \psi, \eta)$ ,

$b_r = \{b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1, 5}, s = \overline{1, p})$ ,

$b_{1,s} = \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 = \tilde{v}_s^2 \cdot \kappa_s^{-2}$ ,  $b_{2,s} = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2$ ,

$b_{3,s} = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2$ ,  $b_{4,s} = \psi''_{xx} + \psi''_{yy} + \psi''_{zz}$ ,  $b_{5,s} = \eta''_{xx} + \eta''_{yy} + \eta''_{zz}$  [1].

**Розв'язання задачі.** Аналогічно до [1; 3; 4] числово-асимптотичне наближення  $c = \{c_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,

$u = \{u_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$ ,  $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p}\}$  розв'язку

задачі (8) – (11) з точністю  $O(\varepsilon^{n+1})$  знайдено у вигляді таких рядів:

$$\begin{aligned}
 c_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{s,i} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{P}_{s,i} + \\
 &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\tilde{P}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{P}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\tilde{P}}_{s,i} + R_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}), \\
 u_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot u_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{H}_{s,i} + \\
 &+ \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\tilde{H}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{H}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\tilde{H}}_{s,i} + \check{R}_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}), \\
 \tilde{\sigma}_s &= \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot \tilde{\sigma}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{h}_{s,i} + \\
 &+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\tilde{h}}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{h}_{s,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \check{\tilde{h}}_{s,i} + \check{R}_{s,n+1} \quad (s = \overline{1, p}),
 \end{aligned}$$

де  $c_{s,i} = c_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $u_{s,i} = u_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{\sigma}_{s,i} = \tilde{\sigma}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ) – члени регулярних частин асимптотик,  $\tilde{P}_{1,i} = \tilde{P}_{1,i}(\tilde{\phi}_0, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{1,i} = \tilde{H}_{1,i}(\tilde{\phi}_0, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{1,i} = \tilde{h}_{1,i}(\tilde{\phi}_0, \psi, \eta, t)$  ( $i = \overline{0, n+1}$ ) і  $\tilde{P}_{p,i} = \tilde{P}_{p,i}(\tilde{\phi}_p, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{p,i} = \tilde{H}_{p,i}(\tilde{\phi}_p, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{p,i} = \tilde{h}_{p,i}(\tilde{\phi}_p, \psi, \eta, t)$  ( $i = \overline{0, n+1}$ ) – функції типу прилежового шару відповідно в околах  $\varphi = \varphi_*$  та  $\varphi = \varphi^*$  (поправки на вході у фільтр та на виході з фільтру),  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\tilde{\phi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{2, p}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ),  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{H}_{s,i} = \tilde{H}_{s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t)$ ,  $\tilde{h}_{s,i} = \tilde{h}_{s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) – функції типу прилежового шару в околах  $\varphi = \varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) (поправки в околі меж розділу шарів фільтру),  $\widehat{P}_{s,i} = \widehat{P}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\widehat{\tilde{P}}_{s,i} = \widehat{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\widehat{H}_{s,i} = \widehat{H}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\widehat{\tilde{H}}_{s,i} = \widehat{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\widehat{h}_{s,i} = \widehat{h}_{s,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\check{P}_{s,i} = \check{P}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\check{\tilde{P}}_{s,i} = \check{\tilde{P}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\check{H}_{s,i} = \check{H}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\check{\tilde{H}}_{s,i} = \check{\tilde{H}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\check{h}_{s,i} = \check{h}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\check{\tilde{h}}_{s,i} = \check{\tilde{h}}_{s,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, 2n+1}$ ) – функції типу прилежового шару відповідно в околах  $\psi = 0$ ,  $\psi = Q_*$ ,  $\eta = 0$ ,  $\eta = Q^*$

(поправки на бічних стінках фільтру),  $\tilde{\phi}_s = \frac{\varphi - \varphi_{*s}^*}{\varepsilon}$  ( $s = \overline{0, p-1}$ ),  
 $\tilde{\phi}_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi}{\varepsilon}$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\tilde{\psi} = \frac{\Psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\tilde{\Psi} = \frac{Q_* - \Psi}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\tilde{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$  – відпо-  
 відні їм регуляризуючі перетворення (розтяги),  $R_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  
 $\tilde{R}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{\tilde{R}}_{s,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$  ( $s = \overline{1, p}$ ) – залишкові члени. Зок-  
 рема, для знаходження  $c_{s,i}$ ,  $u_{s,i}$ ,  $\tilde{\sigma}_{s,i}$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ),  $\tilde{P}_{s,i}$ ,  $\tilde{H}_{s,i}$ ,  $\tilde{h}_{s,i}$   
 ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) і  $\tilde{\tilde{P}}_{s,i}$ ,  $\tilde{\tilde{H}}_{s,i}$ ,  $\tilde{\tilde{h}}_{s,i}$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) одержано фор-  
 мули:

$$c_{s,0} = \begin{cases} \tilde{c}_*(\psi, \eta, t - \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta)) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{1,1}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t \geq \tilde{f}_1, \\ c_{s-1,0}(\psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t \geq \tilde{f}_s, \\ \tilde{c}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta) \cdot e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t)}, & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,0} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \int_0^t \tilde{\alpha}_s(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot c_{s,0}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \tilde{u}_s^0, \quad \tilde{\sigma}_{s,0} = \tilde{\sigma}_s^0 \quad (s = \overline{1, p}),$$

$$c_{s,i} = \begin{cases} e^{-\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \tilde{g}_{s,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t)} d\hat{\varphi}, & t \geq \tilde{f}_s, \\ e^{-\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t)} \cdot \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) \cdot e^{\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t})} d\hat{t}, & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$u_{s,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0} \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t}, \quad \tilde{\sigma}_{s,i} = \int_0^t \tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (s = \overline{1, p}, i = \overline{1, n}),$$

$$\tilde{P}_{1,0} = \left( \tilde{c}_* - c_{1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_0=0} \right) \cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_1} \tilde{\phi}_0},$$

$$\tilde{P}_{1,i} = \frac{1}{d_1} \int_0^{\tilde{\phi}_0} \left( e^{\frac{\kappa_1}{d_1} \hat{\varphi}} \cdot \int_0^{\hat{\varphi}} q_{1,1,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_1}{d_1} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} - c_{1,i} \Big|_{\tilde{\phi}_0=0} \cdot e^{\frac{\kappa_1}{d_1} \tilde{\phi}_0} \right) d\hat{\varphi} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$\tilde{P}_{1,n+1} = \frac{1}{d_1} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_0} \left( e^{\frac{\kappa_1}{d_1} \hat{\varphi}} \cdot \int_0^{\hat{\varphi}} q_{1,1,n+1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_1}{d_1} \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi},$$

$$\tilde{H}_{1,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_1^0(\tilde{\phi}_0, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \tilde{q}_{1,1,i}(\tilde{\phi}_0, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (i = \overline{0, n+1}),$$

$$\tilde{h}_{1,0} = 0, \quad \tilde{h}_{1,i} = \int_0^t \tilde{q}_{1,1,i}(\tilde{\phi}_0, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (i = \overline{1, n+1}),$$

$$\tilde{P}_{p,0} = \frac{d_p}{\kappa_p} \cdot c'_{(p,0)} \tilde{\phi}_p \Big|_{\tilde{\phi}_p=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_p} \tilde{\phi}_p},$$

$$\tilde{P}_{p,i} = \frac{1}{d_p} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_p} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_p} \hat{\phi}} \cdot \int_0^{\hat{\phi}} q_{2,p,i}(\hat{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_p} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi} -$$

$$-\frac{d_p}{\kappa_p} \cdot c'_{(p,i)} \tilde{\phi}_p \Big|_{\tilde{\phi}_p=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_p} \tilde{\phi}_p} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$\tilde{P}_{p,n+1} = \frac{1}{d_p} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_p} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_p} \hat{\phi}} \cdot \int_0^{\hat{\phi}} q_{2,p,n+1}(\hat{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_p} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi},$$

$$\tilde{H}_{p,i} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_p^0(\tilde{\phi}_p, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \tilde{q}_{2,p,i}(\tilde{\phi}_p, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (i = \overline{0, n+1}),$$

$$\tilde{h}_{p,i} = 0, \quad \tilde{h}_{p,i} = \int_0^t \tilde{q}_{2,p,i}(\tilde{\phi}_p, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \quad (i = \overline{1, n+1}),$$

$$\tilde{P}_{s+1,0} = \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left( \left( -d_s \cdot c'_{(s,0)} \tilde{\phi}_s + \kappa_s \cdot c_{s,0} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \left( d_{s+1} \cdot c'_{(s+1,0)} \tilde{\phi}_s + \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,0} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \kappa_s \cdot \left( c_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - c_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}} \tilde{\phi}_s} \quad (s = \overline{1, p-1}),$$

$$\tilde{P}_{s+1,i} = \frac{1}{d_{s+1}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left( e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}} \hat{\phi}} \cdot \int_0^{\hat{\phi}} q_{1,s,i}(\hat{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1}} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi} + \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \times \\ \times \left( \left( -d_s \cdot c'_{(s,i)} \tilde{\phi}_s + \kappa_s \cdot c_{s,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \left( d_{s+1} \cdot c'_{(s+1,i)} \tilde{\phi}_s + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right.$$



$$\begin{aligned}
 & -\kappa_s \cdot \left( c_{s,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - c_{s+1,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_{s+1} \cdot \tilde{\phi}_s}{d_{s+1}}} \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}), \\
 \tilde{P}_{s+1, n+1} &= \frac{1}{d_{s+1}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left( e^{-\frac{\kappa_{s+1} \cdot \hat{\phi}}{d_{s+1}}} \cdot \int_0^{\hat{\phi}} q_{1,s, n+1}(\hat{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_{s+1} \cdot \hat{\phi}}{d_{s+1}}} d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi} \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{H}_{s+1, i} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{1, s+1, i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \times \right. \\
 & \times \left. \int_0^t \hat{q}_{1, s, i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2, s, i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \left( u_{s,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - u_{s+1,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{0, n}), \\
 \tilde{H}_{s+1, n+1} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{1, s+1, n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} - \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{1, s, n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2, s, n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{h}_{s+1, 0} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \tilde{\sigma}_{s, 0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1, 0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{h}_{s+1, i} &= \int_0^t \tilde{q}_{1, s+1, i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^t \tilde{q}_{1, s+1, i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \tilde{q}_{2, s, i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \tilde{\sigma}_{s, 0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1, 0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}), \\
 \tilde{h}_{s+1, n+1} &= \int_0^t \tilde{q}_{1, s+1, n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^t \tilde{q}_{1, s+1, n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \tilde{q}_{2, s, n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{P}_{s, 0} &= \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left( \left( -d_s \cdot c'_{(s,0)} \tilde{\phi}_s + \kappa_s \cdot c_{s,0} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \left( d_{s+1} \cdot c'_{(s+1,0)} \tilde{\phi}_s + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \kappa_{s+1} \cdot \left( c_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - c_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_s} \cdot \tilde{\phi}_s} \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{P}_{s,i} &= \frac{1}{d_s} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left( e^{\frac{\kappa_s}{d_s} \cdot \hat{\varphi}} \cdot \int_0^{\hat{\varphi}} q_{2,s,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_s} \cdot \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} + \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \times \\
 & \times \left( \left( -d_s \cdot c'_{(s,i)} \Big|_{\tilde{\phi}_s} + \kappa_s \cdot c_{s,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \left( d_{s+1} \cdot c'_{(s+1,i)} \Big|_{\tilde{\phi}_s} + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \kappa_{s+1} \cdot \left( c_{s,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - c_{s+1,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \right) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_s} \cdot \tilde{\phi}_s} \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}), \\
 \tilde{P}_{s,n+1} &= \frac{1}{d_s} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left( e^{\frac{\kappa_s}{d_s} \cdot \hat{\varphi}} \cdot \int_0^{\hat{\varphi}} q_{2,s,n+1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_s} \cdot \hat{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{H}_{s,i} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \times \right. \\
 & \left. \times \int_0^t \hat{q}_{1,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) + \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \left( u_{s,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - u_{s+1,i} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{0, n}), \\
 \tilde{H}_{s,n+1} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \\
 & + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\tilde{\sigma}_{s+1}^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{1,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta)} \cdot \int_0^t \hat{q}_{2,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{h}_{s,0} &= -\frac{1}{2} \cdot \left( \tilde{\sigma}_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}), \\
 \tilde{h}_{s,i} &= \int_0^t \hat{q}_{2,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^t \hat{q}_{1,s+1,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \tilde{q}_{2,s,i}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \frac{1}{2} \cdot \left( \tilde{\sigma}_{s,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \tilde{\sigma}_{s+1,0} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}, i = \overline{1, n}), \\
 \tilde{h}_{s,n+1} &= \int_0^t \tilde{q}_{2,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^t \tilde{q}_{1,s+1,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\
 & \left. - \int_0^t \tilde{q}_{2,s,n+1}(\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, \hat{t}) d\hat{t} \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \quad (s = \overline{1, p-1}),
 \end{aligned}$$

де  $\tilde{\lambda}_{s,1}(\varphi, \psi, \eta, t) = \kappa_s \cdot \int_{\Phi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}_s^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi},$

$$\tilde{\lambda}_{s,2}(\varphi, \psi, \eta, t) = \int_0^t \frac{\tilde{\alpha}_s(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)} d\hat{t},$$

$$\tilde{g}_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{g_{s,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) + t)}{\tilde{v}_s^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)},$$

$$\tilde{g}_{s,i}(\varphi, \psi, \eta, \hat{t}) = \frac{g_{s,i}(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \hat{t})}{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{f}_s^{-1}(\hat{t} + \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta)},$$

$$\begin{aligned}
 g_{s,i} &= I(i, 1) \cdot \left( d_s \cdot (b_{1,s} \cdot c_{(s,i-1)}'' \varphi \varphi + b_{2,s} \cdot c_{(s,i-1)}'' \psi \psi + b_{3,s} \cdot c_{(s,i-1)}'' \eta \eta + b_{4,s} \times \right. \\
 & \left. \times c_{(s,i-1)}' \psi + b_{5,s} \cdot c_{(s,i-1)}' \eta) + \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} - \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot c_{(s,i-l)}' t - \tilde{\sigma}'_{(s,l)} t \cdot c_{s,i-l}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{s,i} = \tilde{\alpha}_s \cdot c_{s,i} - I(i, 1) \cdot \left( \tilde{\beta}_s \cdot u_{s,i-1} + \sum_{l=1}^i (\tilde{\sigma}_{s,l} \cdot u'_{(s,i-l)} t + \tilde{\sigma}'_{(s,l)} t \cdot u_{s,i-l}) \right), \quad \tilde{g}_{s,i} =$$

$$= -I(i, 1) \cdot \tilde{\gamma}_s \cdot u_{s,i-1}, \quad \tilde{f}_s = \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_s \cdot \int_{\Phi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{\tilde{\sigma}_s^0(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)}{\tilde{v}_s^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} - \text{час про-}$$

ходження відповідною частинкою домішки шляху від точки  $(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta) \in G_w^{s-1}$  до точки  $(\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s$  вздовж відповідної лінії течії (від точки  $(x(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta)) \in G_z^{s-1}$  до точки  $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^s$ ),  $\tilde{f}_s^{-1}$  – функція, обернена відповідно до  $\tilde{f}_s$  відносно змінної  $\varphi$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $q_{1,s,i} = b_{1,s}^{-1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \times$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( I(i, 1) \cdot \left( \sum_{l=0}^{i-1} (\tilde{h}_{s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,i-l-1)t} + \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{P}_{s,i-l-1} + \tilde{\sigma}_{s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,i-l-1)t} + \tilde{\sigma}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{P}_{s,i-l-1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{h}_{s,l} \cdot c'_{(s,i-l-1)t} + \tilde{h}'_{(s,l)t} \cdot c_{s,i-l-1} \right) - \sum_{l=1}^i \tilde{B}_{1,s,l} \cdot \left( d_s \cdot \tilde{P}''_{(s,i-l)} \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} - \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,i-l)} \tilde{\varphi} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{l=0}^i \tilde{\alpha}_{s,l} \cdot \tilde{P}_{s,i-l} \right) + I(i, 2) \cdot \left( \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\beta}_{s,l} \cdot \tilde{H}_{s,i-l-1} + d_s \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left( \tilde{B}_{2,s,l} \cdot \tilde{P}''_{(s,i-2-l)} \psi \eta \psi + \tilde{B}_{3,s,l} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \tilde{P}''_{(s,i-2-l)} \eta \eta + \tilde{B}_{4,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,i-2-l)} \psi + \tilde{B}_{5,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,i-2-l)} \eta \right) \right) \Bigg), \quad q_{2,s,i} = b_1^{-1}(\varphi_{*s}, \psi, \eta) \times \\
 & \times \left( I(i, 1) \cdot \left( \sum_{l=0}^{i-1} (\tilde{\tilde{h}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s,i-l-1)t} + \tilde{\tilde{h}}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i-l-1} + \tilde{\tilde{\sigma}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s,i-l-1)t} + \tilde{\tilde{\sigma}}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i-l-1} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{\tilde{h}}_{s,l} \cdot c'_{(s,i-l-1)t} + \tilde{\tilde{h}}'_{(s,l)t} \cdot c_{s,i-l-1} \right) - \sum_{l=1}^i \tilde{\tilde{B}}_{1,s,l} \cdot \left( d_s \cdot \tilde{\tilde{P}}''_{(s,i-l)} \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} + \kappa_s \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s,i-l)} \tilde{\varphi} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{l=0}^i \tilde{\tilde{\alpha}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i-l} \right) + I(i, 2) \cdot \left( \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\tilde{\beta}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l-1} + d_s \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left( \tilde{\tilde{B}}_{2,s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}''_{(s,i-2-l)} \psi \eta \psi + \tilde{\tilde{B}}_{3,s,l} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \tilde{\tilde{P}}''_{(s,i-2-l)} \eta \eta + \tilde{\tilde{B}}_{4,s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s,i-2-l)} \psi + \tilde{\tilde{B}}_{5,s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}'_{(s,i-2-l)} \eta \right) \right) \Bigg), \quad \tilde{q}_{1,s,i} = \sum_{l=0}^i \tilde{\tilde{\alpha}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i-l} - \\
 & - I(i, 1) \cdot \left( \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\tilde{\beta}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l-1} + \sum_{l=1}^i \left( \tilde{\tilde{\sigma}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}'_{(s,i-l)t} + \tilde{\tilde{\sigma}}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l} + \tilde{\tilde{h}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}'_{(s,i-l)t} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{\tilde{h}}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l} + \tilde{\tilde{h}}_{s,l} \cdot u'_{(s,i-l)t} + \tilde{\tilde{h}}'_{(s,l)t} \cdot u_{s,i-l} \right) \right), \quad \tilde{q}_{2,s,i} = \sum_{l=0}^i \tilde{\tilde{\alpha}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,i-l} - I(i, 1) \times \\
 & \times \left( \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\tilde{\beta}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l-1} + \sum_{l=1}^i \left( \tilde{\tilde{\sigma}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}'_{(s,i-l)t} + \tilde{\tilde{\sigma}}'_{(s,l)t} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l} + \tilde{\tilde{h}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}'_{(s,i-l)t} + \tilde{\tilde{h}}'_{(s,l)t} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l} + \tilde{\tilde{h}}_{s,l} \cdot u'_{(s,i-l)t} + \tilde{\tilde{h}}'_{(s,l)t} \cdot u_{s,i-l} \right) \right), \quad \tilde{q}_{1,s,i} = -I(i, 1) \cdot \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\tilde{\gamma}}_{s,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s,i-l-1}, \\
 & \tilde{q}_{2,s,i} = -I(i, 1) \cdot \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\tilde{\gamma}}_{s+1,l} \cdot \tilde{\tilde{H}}_{s+1,i-l-1} \quad (s = \overline{1, \delta}, \quad i = \overline{0, n+1}), \quad \tilde{B}_{r,s,l} \quad (r = \overline{1, 5}), \\
 & \tilde{\tilde{\alpha}}_{s,l}, \quad \tilde{\tilde{\beta}}_{s,l}, \quad \tilde{\tilde{\gamma}}_{s,l} \quad (s = \overline{1, \delta}) \quad \text{і} \quad \tilde{\tilde{B}}_{r,s,l} \quad (r = \overline{1, 5}), \quad \tilde{\tilde{\alpha}}_{s,l}, \quad \tilde{\tilde{\beta}}_{s,l}, \quad \tilde{\tilde{\gamma}}_{s,l} \quad (s = \overline{1, p}) - \text{коє-} \\
 & \text{фіцієнти при } l\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ в розкладі відповідно функцій} \\
 & b_{r,s}(\varphi_{*s} + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_s, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1, 5}), \quad \tilde{\tilde{\alpha}}_s(\varphi_{*s} + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\tilde{\beta}}_s(\varphi_{*s} + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}_s(\varphi_{*s}^* + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{0, p-1}) \quad \text{і} \quad b_{r,s}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1, 5}), \\ & \tilde{\alpha}_s(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\beta}_s(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t), \quad \tilde{\gamma}_s(\varphi_{*s}^* - \varepsilon \cdot \tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{1, p}) \end{aligned}$$

у ряд Тейлора в околах  $\varphi = \varphi_{*s}^* \quad (s = \overline{0, p}), \quad I(a, b) = \begin{cases} 1, & a \geq b, \\ 0, & a < b. \end{cases}$

**Результати числових розрахунків.** У ході комп'ютерного експерименту здійснено моделювання процесу доочисти води від домішок у двохшаровому фільтрі з кусково-однорідним пористим завантаженням, що характеризується різними коефіцієнтами фільтрації  $\kappa_1 = 8,5$  м/добу,  $\kappa_2 = 5,6$  м/добу, активної пористості  $\tilde{\sigma}_1^0 = 0,4$ ,  $\tilde{\sigma}_2^0 = 0,35$  і дифузії  $D_1 = 0,0005$  м<sup>2</sup>/добу,  $D_2 = 0,0003$  м<sup>2</sup>/добу, форму якого описано поверхнями:  $f_1(x, y, z) = x - 2$ ,  $f_2(x, y, z) = (x - 4,07773)^2 + y^2 + z^2 - 0,31698$ ,  $f_3(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y - 6,15538)^2 + z^2 - 41,88854$ ,  $f_4(x, y, z) = (x - 2)^2 + (y + 6,15538)^2 + z^2 - 41,88854$ ,  $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x^2 - 4x + y^2 + z^2)^2 + 16y^2 - 93,25483z^2$ , а межу розділу – поверхнею:  $f_{*1}^*(x, y, z) = (x - 4,67782)^2 + y^2 + z^2 - 3,17071$ . Функції  $f_i(x, y, z)$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) підібрані так, щоб забезпечити “монотонне звуження” фільтру в напрямку від його входу до виходу та взаємну ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках.

У результаті побудовано розрахункову гідродинамічну сітку в  $G_z$  при  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 20$  ( $n = 40$ ),  $m = 16$ ,  $l = 12$ ,  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 18,39$  (параметри  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $m$  і  $l$  вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату  $Q = 3,43$  м<sup>3</sup>/год, потенціал на поверхні розділу  $\varphi_*^* = 10,96$ , обчислено величини швидкості фільтрації  $|v|$  та  $b_r$  ( $r = \overline{1, 5}$ ), що відповідають величині середньої швидкості руху води через завантаження фільтру 3 м/год.

На рис. 2 представлено розподіли середніх величин концентрацій домішок  $c_{\text{сер}}(\varphi, t)$  і  $u_{\text{сер}}(\varphi, t)$  відповідно у фільтраційній течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження та середньої величини активної пористості  $\tilde{\sigma}_{\text{сер}}(\varphi, t)$  завантаження фільтру у різні моменти часу

при  $c_* = 0,0005$ ,  $c_s^0 = 0$ ,  $u_s^0 = 0$ ,  $\tilde{\alpha}_s = \sqrt[3]{0,25} \cdot (0,67 \cdot \tilde{v}^2 + 1,25)$ ,  
 $\tilde{\beta}_s = 0,00001 \cdot \tilde{\alpha}_s$ ,  $\tilde{\gamma}_s = 0,00003 \cdot s$  ( $s = 1, 2$ ).

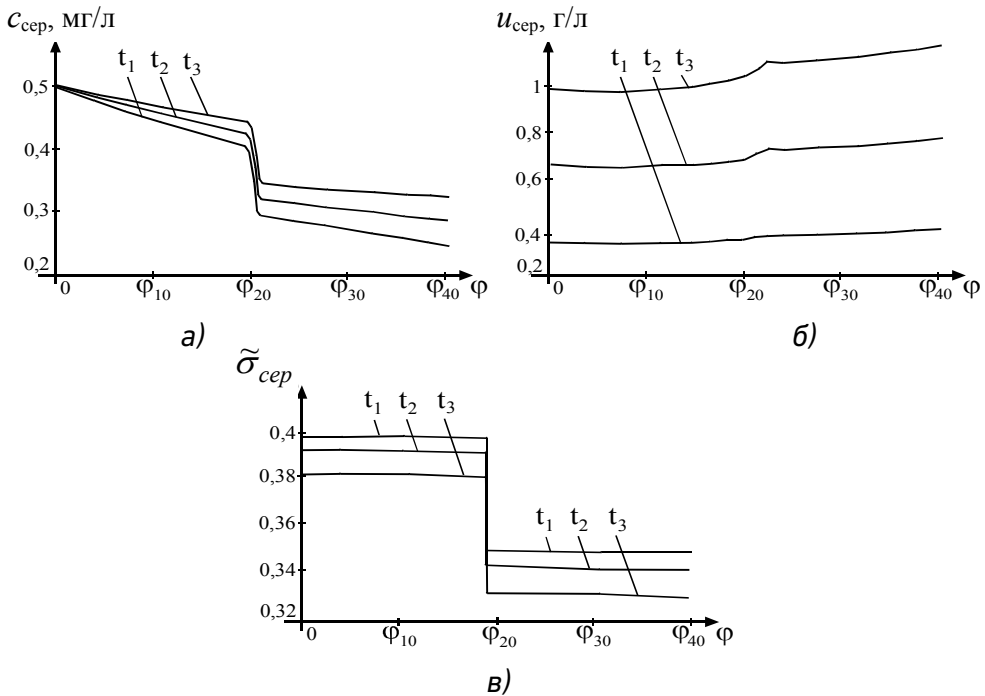


Рис. 2. Розподіли  $c_{сер}(\varphi, t)$ ,  $u_{сер}(\varphi, t)$  і  $\tilde{\sigma}_{сер}(\varphi, t)$  вздовж фільтру  
у моменти часу  $t_1 = 400$  год,  $t_2 = 800$  год,  $t_3 = 1200$  год

**Висновки.** Сформовано просторову математичну модель процесу доочистки води від домішок у багат шарових швидких фільтрах з кусково-однорідними пористими завантаженнями, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділені деякими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей. Отримана модель враховує зворотній вплив концентрації домішок, адсорбованих на зернах завантаження, на активну пористість. Отримана модель дозволяє шляхом проведення комп'ютерних експериментів спрогнозувати оптимальні варіанти використання фільтрувальних матеріалів та збільшення тривалості фільтроциклу фільтрів за рахунок підбору їх форми і висоти шарів (рис. 2).

У числово-асимптотичному наближенні розв'язку відповідної модельної задачі отримано нового типу поправки, що характеризують механізм перерозподілу концентрацій домішок у фільтраційній

течії і осаді, адсорбованому на зернах завантаження, в околах ділянок розділу шарів.

1. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне : ТзОВ фірма «Ассоль», 2014. – 273 с.
2. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.
3. Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв’язків просторових модельних задач процесу фільтрування / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, А. П. Сафоник, В. М. Сівак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29–39.
4. Климюк Ю. Є. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища / Ю. Є. Климюк, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 7 (16). – Рівне : РДГУ, 2010. – С. 93–109.
5. Минц Д. М. Теоретические основы технологии очистки воды / Д. М. Минц. – М.: Стройиздат, 1964. – 156 с.
6. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. – Рівне : НУВГП, 2005. – 163 с.
7. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М.: Стройиздат. – 1967. – 390 с.
8. Cheremisinoff N. P. Handbook of water and wastewater treatment technologies / N. P. Cheremisinoff. – Boston : Butterworth-Heinemann, 2002. – 645 p.
9. Hendricks D. W. Fundamentals of water treatment unit processes : physical, chemical, and biological / D. W. Hendricks. – Boca Raton: CRC Press, 2011. – 883 p.
10. Quevauviller Ph. Analytical methods for drinking water: advances in sampling and analysis / Ph. Quevauviller, K. C. Thompson. – John Wiley & Sons Ltd, 2006. – 188 p.

Рецензент: д.т.н., проф. Бомба А. Я. (РДГУ)

---

**Klymiuk Y. Y., Candidate of Engineering, Associate Professor** (Rivne State University of Humanities, Rivne)

## **MATHEMATICAL MODELLING OF THE PROCESS OF WATER PURIFICATION FROM IMPURITIES IN MULTILAYER FILTER WITH POROUS LOAD**

**A mathematical model to predict the process of water purification from impurities in multilayer filter with piecewise-homogeneous porous load, each layer of which has different coefficients of the filter, active porosity and diffusion, subject to constant rate filtration, is**

**proposed. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem for a filter that has the shape of a curvilinear parallelepiped, bounded two equipotential surfaces and four surfaces flow, separated by some given specified of the equipotential surfaces on several subdomains, is developed. The results of numerical calculations and conducted their analysis.**

**Keywords:** mathematical model, multilayer filter, process of water purification, porous load.

---

**Климюк Ю. Е., к.т.н., доцент** (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно)

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДООЧИСТКИ ВОДЫ ОТ ПРИМЕСЕЙ В МНОГОСЛОЙНОМ БЫСТРОМ ФИЛЬТРЕ С ПОРИСТОЙ ЗАГРУЗКОЙ**

**Предложена математическая модель для прогнозирования процесса доочистки воды от примесей в многослойном быстром фильтре с кусочно-однородной пористой загрузкой, каждый слой которой характеризуется различными коэффициентами фильтрации, активной пористости и диффузии, при соблюдении постоянной скорости фильтрации. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи для фильтра, который имеет форму криволинейного параллелепипеда, ограниченного двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения и разделен некоторыми заданными эквипотенциальными поверхностями на несколько подобластей. Приведены результаты численных расчетов и осуществлен их анализ.**

**Ключевые слова:** математическая модель, многослойный фильтр, процесс доочистки воды, пористая загрузка.

---