 ISSN 2306-5478

УДК 519.876:658.5:519.624 https://doi.org/10.31713/vt1202618

Кіт Н.В. [1;],
аспірант
(nataliia.kozodii@tntu.edu.ua)
Сверстюк А.С. [2;],
доктор технічних наук, професор
(sverstyuk@tdmu.edu.ua)

[1] Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, м. Тернопіль
[2] Тернопільський національний медичний університет ім. І.Я.Горбачевського, м Тернопіль

СТАЦІОНАРНІ СТАНИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВИРОБНИЧОЇ МЕРЕЖІ НА КВАДРАТНІЙ РЕШІТЦІ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

У роботі запропоновано стаціонарні стани для дослідження математичної моделі виробничих мереж на квадратній решітці на основі диференціальних рівнянь із запізненням. Для опису логістично-виробничих процесів використано решітчасту модель, яка базується на системі диференціальних рівнянь із запізненням. Модель дозволяє врахувати взаємодію між вузлами мережі через обмін ресурсами, а також процеси їх переробки у продукцію. На її основі досліджуються можливі режими функціонування системи. Зокрема, розглянуто стаціонарні стани, які відповідають сталим режимам роботи виробничої мережі. Визначено їх основні типи та встановлено, що вони задаються як розв'язки відповідної системи рівнянь. Отримані результати створюють передумови для подальшого дослідження стійкості системи та чисельного аналізу її поведінки.

Ключові слова: проектування виробничої мережі, математичне моделювання, решітчаста модель, диференціальні рівняння із запізненням, стаціонарні стани, логістичні системи, динамічні системи

Постановка наукової проблеми. Сучасні логістично-виробничі системи характеризуються складною структурою взаємозв'язків між вузлами, наявністю просторового розподілу ресурсів та продукції, а також впливом запізненням у часі у процесах транспортування і виробництва. Для опису таких систем доцільно використовувати математичні моделі решітчастого типу, що базуються на системах диференціальних рівнянь із запізненням.

Незважаючи на значну кількість досліджень у галузі математичного моделювання динамічних систем, питання стійкості просторово розподілених виробничих мереж із урахуванням запізнення залишаються недостатньо вивченими. Зокрема, існує потреба в дослідженні умов локальної та глобальної асимптотичної стійкості таких систем, а також у визначенні впливу ключових параметрів моделі на їх динамічну поведінку.

Особливої актуальності набуває аналіз стійкості у контексті ефективного функціонування виробничих мереж, де порушення балансу ресурсів або запізнення у виробничих процесах можуть призводити до суттєвого зниження продуктивності системи.

Таким чином, наукова проблема полягає у необхідності розроблення та дослідження математичних моделей решітчастого типу для виробничих мереж з урахуванням запізнення у часі, а також встановлення умов їх стійкості та визначення впливу параметрів системи на її функціонування.

Мета роботи. Запропонувати стаціонарні стани для дослідження математичної моделі виробничої мережі решітчастого типу з урахуванням запізнення у часі.

Аналіз досліджень. Проектування виробничої мережі має вирішальне значення, оскільки визначає оптимальне розміщення виробничих і логістичних потужностей, впливає на ефективність витрат, рівень обслуговування клієнтів та загальну конкурентоспроможність на світовому ринку [1]. Це дозволяє компаніям стратегічно позиціонувати свою діяльність, щоб задовольнити попит, мінімізувати витрати і швидко адаптуватися до мінливих умов ринку. Сучасне проектування виробничої мережі з інтеграцією багатошарових нейронних мереж направлене на оптимізацію розташування логістичних та виробничих вузлів. Багатошарові нейронні мережі відіграють важливу роль у цьому процесі проектуванні виробничої мережі, використовуючи передові алгоритми, моделі машинного навчання та методи оптимізації для аналізу величезної кількості даних [2]. У полі великих даних із збільшенням обчислювальних можливостей нейронні мережі продемонстрували велику силу у вирішенні проблем класифікації даних і регресії [3]. Одним з ключових досягнень є використання прогнозної аналітики для прогнозування моделей попиту, що дозволяє компаніям стратегічно розташувати свої об'єкти ближче до регіонів високого попиту [4].

Проблеми моделювання та проєктування виробничих і логістичних мереж активно досліджуються у сучасній науковій літературі. Значна кількість робіт присвячена побудові математичних моделей ланцюгів

 ISSN 2306-5478

постачання, оптимізації потоків ресурсів і продукції, а також аналізу ефективності функціонування мереж.

Зокрема, у роботі [5] розглянуто математичні моделі проєктування мереж постачання, де враховуються витрати, транспортні режими та екологічні фактори. Автори підкреслюють важливість балансування між економічною ефективністю та стійкістю системи. Подібний підхід використано і в роботах [6] де моделюються динамічні ланцюги постачання з урахуванням коливань попиту, що впливають на стабільність виробничих процесів.

Дослідження [7] спрямовані на інтеграцію виробничих, транспортних і складських процесів у єдину математичну модель, що дозволяє підвищити узгодженість рішень у мережі та зменшити ефект «батога». У роботі [8] запропоновано стохастичні моделі ланцюгів постачання з урахуванням невизначеностей і збурень, що дозволяє оцінювати стійкість системи до зовнішніх впливів.

Окремий напрям досліджень стосується динаміки виробничих мереж. У роботі [9] розглядаються підходи до аналізу складних мереж із використанням методів теорії керування, системної динаміки та теорії складних систем. Встановлено, що нелінійність і наявність зворотних зв'язків суттєво впливають на поведінку виробничих систем.

Питання стійкості виробничих мереж досліджуються, зокрема, у роботі [10] , де запропоновано методи аналізу автономно керованих виробничих систем і визначено умови їх стабільного функціонування. Додатково, у роботі [11] показано, що локальні збої у виробництві можуть призводити до каскадних ефектів у всій мережі, що підкреслює важливість дослідження стійкості.

Важливу роль у моделюванні складних систем відіграють диференціальні рівняння із запізненням. У роботах [12] та [13] показано, що врахування запізнення у часі дозволяє більш адекватно описувати динаміку систем, а також визначати умови виникнення коливань і нестійкості. Аналогічні підходи застосовуються і для аналізу мереж різної природи, зокрема біологічних та технічних систем.

Компартментні моделі також знаходять широке застосування у дослідженнях складних мереж. У роботі [14] продемонстровано ефективність використання таких моделей для опису потоків між елементами системи та аналізу їх динаміки.

Разом із тим, аналіз літератури показує, що більшість існуючих досліджень зосереджені або на оптимізації структури виробничих мереж, або на дослідженні окремих аспектів їх динаміки. Недостатньо уваги приділено побудові та дослідженню компартментних моделей решітчастого типу з урахуванням просторового розподілу та запізнення у часі, а також аналізу їх локальної та глобальної стійкості.

Таким чином, існує необхідність у подальшому розвитку математичних моделей виробничих мереж, які б поєднували просторову структуру, часові запізнення та механізми взаємодії між вузлами, що і визначає актуальність даного дослідження.

Проектування решітчастої моделі. Наведена нижче модель розроблена для вирішення проблем проектування виробничих мереж, що виникають під час транспортування сировини між логістичними центрами на прямокутній решітці з використанням решітчастих диференціальних рівнянь із запізненням

Термінологія моделі походить з [15]. Модель базується на ряді припущень. Припустимо, що виробнича мережа включає в себе логістично-виробничі вузли, які розташовані у вузлах прямокутної решітки (i, j), $(i, j)=\overline{1, N}$. Нехай для t, в даний момент часу, $V_{i,j}(t)$ є ресурсами, які використовуються для виробництва продукту і в даний час розташовані на вузлі, в свою чергу, $F_{i,j}(t)$ є готовим продуктом, який виробляється і зберігається на (i, j).

Модель враховує наступні параметри процесів виробництва і транспортування для довільного логістично-виробничого вузла (i, j):

1. Ресурси з'являються (можуть бути «видобуті») всередині виробничого вузла з імовірністю $\beta > 0$.
2. На виготовлення одиниці продукції потрібно $\gamma > 0$ одиниць ресурсу.
3. Використання ресурсу обмежено за допомогою коефіцієнта $\delta_v > 0$, який дозволяє нам прагнути до рівня пропускної здатності для $V_{i,j}(t)$.
4. Припустимо, що передача ресурсів може бути можлива з чотирьох сусідніх вузлів $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ (Рис. 1) з вершинами $D_{i,j}^{i-1,j}\Delta^{-2}$, $D_{i,j}^{i+1,j}\Delta^{-2}$, $D_{i,j}^{i,j-1}\Delta^{-2}$, $D_{i,j}^{i,j+1}\Delta^{-2}$ де $D_{i,j}^{k,m} > 0$, $i, j, k, m=\overline{1, n}$ і $\Delta > 0$ – це відстань між вузлами.
5. Виробництво може бути забраковано з імовірністю $\mu_f > 0$.
6. В результаті запізнення у часі і неврахованих наслідків ми спостерігаємо збільшення вартості ресурсу, необхідного для виробництва продукції, до рівня ймовірності $\eta\gamma$.
7. Виробництво прагне до певної пропускної здатності з імовірністю $\delta_f > 0$.
8. Нехай $\tau > 0$ – час, необхідний для виготовлення одиниці продукції.

 ISSN 2306-5478

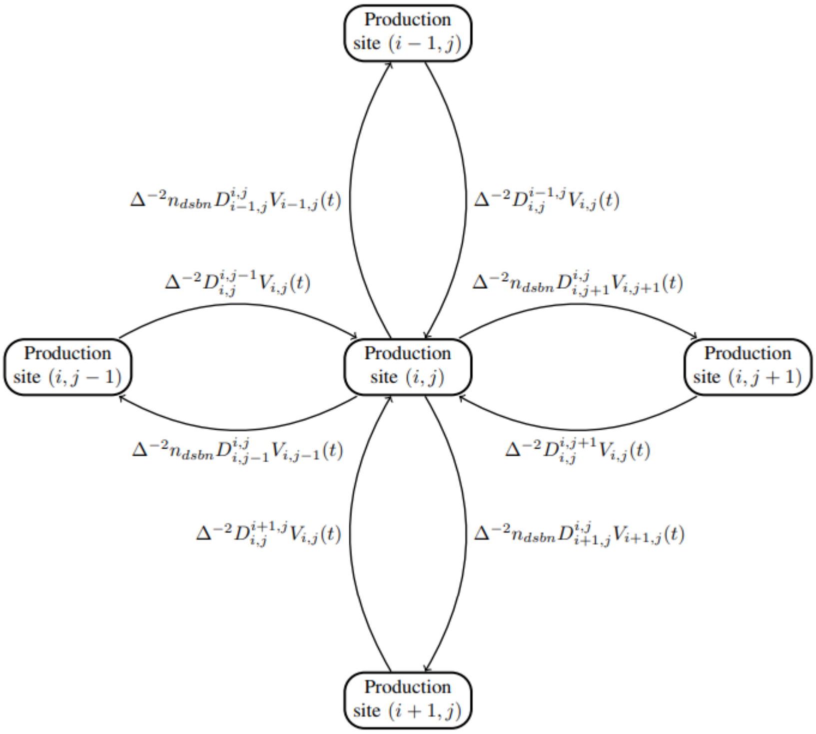

Рис. 1. Квадратна решітка, що представляє чотири сусідні логістично-виробничі вузли

З наведених припущень ми розглядаємо приріст вартості ресурсів у вузлі (i,j) протягом часу $\Delta t : \Delta V_{i,j}(t) = V_{i,j}(t+\Delta t) - V_{i,j}(t)$ з урахуванням наступних припущень:

а) збільшення на величину $\beta V_{i,j}(t)\Delta t$, що викликано «видобутком» нового ресурсу;

б) зменшення на величину $-\gamma F_{i,j}(t-\tau)V_{i,j}(t)\Delta t$, що пояснюється ресурсами, необхідними для виробництва продукції у вузлі (i,j) в момент $(t-\tau)$;

в) збільшення вартості $-\Delta\delta_v V_{i,j}(t-\tau)V_{i,j}(t)\Delta t$ внаслідок пропускної здатності ресурсів.

Кількість продуктів у вузлі (i,j) також залежить від розподілу сировини між чотирма сусідніми вузлами, що враховується при обчисленні просторового оператора $\hat{S}\{V_{i,j}(t)\}\Delta t$ у вигляді (4).

Виходячи з наведених вище припущень, збільшення кількості ресурсів $\Delta V_{i,j}(t)$ у вузлі (i,j) за певний проміжок часу можна записати у вигляді $\Delta V_{i,j}(t)\Delta t$.

Розділивши ліву і праву частини всього рівняння на Δt і додавши $\Delta t \to 0$, отримаємо рівняння для визначення кількості сировинних ресурсів $V_{i,j}$, $t>0$.

$$\frac{dV_{i,j}}{dt} = \beta V_{i,j}(t) - \gamma F_{i,j}(t-\tau)V_{i,j}(t) - \delta_v V_{i,j}(t-\tau)V_{i,j}(t) + \hat{S}\{V_{i,j}(t)\} \tag{1}$$

Зростання продукції у вузлі (i,j) за період часу Δt становить

$$\Delta F_{i,j}(t) = F_{i,j}(t+\Delta t) - F_{i,j}(t) \tag{2}$$

Згідно з припущеннями, зазначеними вище, наступні аналоги впливають на зміну продукту на виробничому вузлі (i,j) за період часу Δt:

а) зменшується на значення $-\mu_f F_{i,j}(t)\Delta t$ за рахунок кількості бракованих виробів;

б) збільшення на величину $\eta\gamma V_{i,j}(t-\tau)F_{i,j}(t)\Delta t$, яка визначається ресурсами, необхідними для виробництва одиниці продукції в момент часу $(t-\tau)$ (τ – значення запізнення (час, витрачений на виробництво одиниці продукції));

в) зменшення на величину $-\delta_f F_{i,j}^2(t)\Delta t$, що викликано зниженням швидкості виготовлення нових виробів δ_f у зв'язку з наближенням їх до межі насичення.

З наведених причин зростання продуктів $\Delta F_{i,j}(t)$ у вузлі (i,j) за період часу Δt можна записати як $\Delta F_{i,j}(t) = -\mu_f F_{i,j}(t)\Delta t + \eta\gamma V_{i,j}(t-\tau)F_{i,j}(t)\Delta t - \delta_f F_{i,j}^2(t)\Delta t, t>0$.

Розділивши ліву і праву частини останнього рівняння на Δt з напрямком $\Delta t \to 0$, отримаємо рівняння для визначення кількості продукції:

$$\frac{dF_{i,j}}{dt} = (-\mu_f + \eta\gamma V_{i,j}(t-\tau) - \delta_f F_{i,j}(t))F_{i,j}(t), t>0 \tag{3}$$

Оператор (4) включає в себе константу n_{dsbn}, яка описує можливі дисбаланси між вхідними та вихідними потоками сировини.

Кожен вузол піддається впливу ресурсів, вироблених на чотирьох сусідніх вузлах – по два вузла в кожному напрямку, розділених однаковою відстанню Δ.

 ISSN 2306-5478

$$\hat{S}\{V_{i,j}\}=\begin{cases}
\Delta^{-2}\left[D_{1,2}^{1,1}V_{1,2}+D_{2,1}^{1,1}V_{2,1}-n_{dsbn}D_{1,1}^{1,2}V_{1,1}-n_{dsbn}D_{1,1}^{2,1}V_{1,1}\right] & i,\ j=1\\
\Delta^{-2}\left[D_{2,j}^{1,j}V_{2,j}+D_{1,j-1}^{1,j}V_{1,j-1}+D_{1,j+1}^{1,j}V_{1,j+1}-n_{dsbn}D_{1,j}^{2,j}V_{1,j}-n_{dsbn}D_{1,j}^{1,j-1}V_{1,j}-n_{dsbn}D_{1,j}^{1,j+1}V_{1,j}\right] & i=1,\ j\in\overline{2,N-1}\\
\Delta^{-2}\left[D_{1,N-1}^{1,N}V_{1,N-1}+D_{2,N}^{1,N}V_{2,N}-n_{dsbn}D_{1,N}^{1,N-1}V_{1,N}-n_{dsbn}D_{1,N}^{2,N}V_{1,N}\right] & i=1,\ j=N\\
\Delta^{-2}\left[D_{i-1,N}^{i,N}V_{i-1,N}+D_{i+1,N}^{i,N}V_{i+1,N}+D_{i,N-1}^{i,N}V_{i,N-1}-n_{dsbn}D_{i,N}^{i-1,N}V_{i,N}-n_{dsbn}D_{i,N}^{i+1,N}V_{i,N}-n_{dsbn}D_{i,N}^{i,N-1}V_{i,N}\right] & i\in\overline{2,N-1},\ j=N\\
\Delta^{-2}\left[D_{N-1,N}^{N,N}V_{N-1,N}+D_{N,N-1}^{N,N}V_{N,N-1}-n_{dsbn}D_{N,N}^{N-1,N}V_{N,N}-n_{dsbn}D_{N,N}^{N,N-1}V_{N,N}\right] & i=N,\ j=N\\
\Delta^{-2}\left[D_{N-1,j}^{N,j}V_{N-1,j}+D_{N,j-1}^{N,j}V_{N,j-1}+D_{N,j+1}^{N,j}V_{N,j+1}-n_{dsbn}D_{N,j}^{N-1,j}V_{N,j}-n_{dsbn}D_{N,j}^{N,j-1}V_{N,j}-n_{dsbn}D_{N,j}^{N,j+1}V_{N,j}\right] & i=N,\ j\in\overline{2,N-1}\\
\Delta^{-2}\left[D_{N-1,1}^{N,1}V_{N-1,1}+D_{N,2}^{N,1}V_{N,2}-n_{dsbn}D_{N,1}^{N-1,1}V_{N,1}-n_{dsbn}D_{N,1}^{N,2}V_{N,1}\right] & i=N,\ j=1\\
\Delta^{-2}\left[D_{i-1,1}^{i,1}V_{i-1,1}+D_{i+1,1}^{i,1}V_{i+1,1}+D_{i,2}^{i,1}V_{i,2}-n_{dsbn}D_{i,1}^{i-1,1}V_{i,1}-n_{dsbn}D_{i,1}^{i+1,1}V_{i,1}-n_{dsbn}D_{i,1}^{i,2}V_{i,1}\right] & i\in\overline{2,N-1},\quad j=1\\
\Delta^{-2}\left[D_{i-1,j}^{i,j}V_{i-1,j}+D_{i+1,j}^{i,j}V_{i+1,j}+D_{i,j-1}^{i,j}V_{i,j-1}+D_{i,j+1}^{i,j}V_{i,j+1}-n_{dsbn}D_{i,j}^{i-1,j}V_{i,j}-n_{dsbn}D_{i,j}^{i+1,j}V_{i,j}-n_{dsbn}D_{i,j}^{i,j-1}V_{i,j}-n_{dsbn}D_{i,j}^{i,j+1}V_{i,j}\right], & i,\ j\in\overline{2,N-1}
\end{cases}$$

(4)

Використовується гранична умова $V_{i,j}=0$ для індексів масиву $i,\ j=0,N+1$.

Стаціонарні стани функціонування математичної моделі виробничої мережі на квадратній решітці з використанням диференціальних рівнянь із запізненням. При дослідженні стійкості математичної моделі виробничої мережі, заданої на прямокутній решітці з використанням диференціальних рівнянь із запізненням, визначаються постійні стани функціонування системи.

У межах моделі розглядаються такі типи станів:

- тривіальний стан рівноваги;
- стан рівноваги без продукції;
- однорідний стан рівноваги функціонування;
- неоднорідний стан рівноваги функціонування.

У загальному випадку стан рівноваги визначається як

$$E_{i,j}\equiv\left(V_{i,j},F_{i,j}\right), \tag{5}$$

де $V_{i,j}(t)$ – обсяг сировинних ресурсів у вузлі, $F_{i,j}(t)$ – обсяг продукції.

Стан рівноваги визначається як розв'язок нелінійної алгебраїчної системи, отриманої з вихідної моделі шляхом прирівнювання правих частин рівнянь до нуля:

$$\left(\beta-\gamma F_{i,j}^{*}-\delta_v V_{i,j}^{*}\right)V_{i,j}^{*}+S\{V_{i,j}^{*}\}=0 \tag{6}$$
$$\left(-\mu_f+\eta\gamma V_{i,j}^{*}-\delta_f F_{i,j}^{*}\right)F_{i,j}^{*}=0, i,j=\overline{1,N}.$$

Розглядаючи $E_{i,j}=\left(V_{i,j},F_{i,j}\right)$ можна записати стаціонарний стан рівноваги, коли ресурси накопичуються тривіальний стан без ресурсів та продукції у вузлах, коли у виробничій мережі відсутні як ресурси, так і продукція. Такий режим може інтерпретуватись як повна зупинка функціонування системи (7) та стаціонарний стан рівноваги при якому ресурси накопичуються у вузлах мережі, але їх переробка не відбувається в у продукцію. Це може бути пов'язано з відсутністю виробничої активності або неефективністю виробничих процесів (8).

Тривіальний стаціонарний стан без ресурсів та продукції у вузлах

$$E_{i,j}^{0,0} = (0,0). \tag{7}$$

Стаціонарний стан без продукції визначається як:

$$E_{i,j}^{*,0} = \left(\frac{\beta}{\delta_v}, 0\right). \tag{8}$$

Розглянемо однорідний стаціонарний режим функціонування, коли значення змінних однакові в усіх вузлах решітки. У цьому випадку просторовий оператор обміну ресурсами дорівнює нулю

$$V_{i,j} = V^{\text{ідент}} > 0, \left(\hat{S}\{V_{i,j}\} \equiv 0\right), \tag{9}$$

що означає відсутність про відсутність градієнта ресурсів між вузлами та система перебуває у просторово однорідному стані.

Тоді стаціонарний стан має вигляд:

$$E_{i,j} = (V^{\text{ідент}}, F^{\text{ідент}}), \tag{10}$$

де значення $V^{\text{ідент}}$, $F^{\text{ідент}}$ визначаються як розв'язки системи стаціонарних рівнянь.

Стан рівноваги існує за умови додатності обох компонент:

$$V^{\text{ідент}} > 0, F^{\text{ідент}} > 0. \tag{11}$$

Стан рівноваги існує за умови додатності обох компонент, що випливає з аналізу відповідної системи рівнянь.

Для визначення неоднорідного стаціонарного стану рівноваги при якому ресурси стану необхідно розв'язати систему (6) та знайти значення змінних у кожному вузлі мережі.

Неоднорідний стаціонарний стан можна записати у вигляді

$$E^{\text{неідент}} = \left(V_{i,j}^{\text{неідент}}, F_{i,j}^{\text{неідент}}\right), \tag{12}$$

де значення змінних $V^{\text{неідент}}$, $F^{\text{неідент}}$ відрізняються у різних вузлах мережі.

Такий режим характеризується просторовою неоднорідністю розподілу ресурсів і продукції між вузлами мережі.

Стаціонарний стан існує за умови:

$$V_{i,j}^{\text{неідент}} > 0, F_{i,j}^{\text{неідент}} > 0. \tag{13}$$

Значення однорідного стаціонарного стану можуть бути використані як початкові наближення для чисельного розв'язування відповідної нелінійної алгебраїчної системи.

Висновок. У роботі розглядається математична модель виробничої мережі решітчастого типу з урахуванням запізнення у часі. Модель описується системою диференціальних рівнянь із запізненням та дозволяє

 ISSN 2306-5478

врахувати процеси надходження, переробки і розподілу ресурсів між логістично-виробничими вузлами.

Запропоновано підхід до моделювання виробничої мережі на прямокутній решітці, де взаємодія між вузлами здійснюється через обмін ресурсами із сусідніми вузлами На основі побудованої моделі отримано систему рівнянь, що описує динаміку ресурсів і продукції в кожному вузлі мережі.

Проведено аналіз стаціонарних режимів функціонування системи. Визначено основні типи стаціонарних станів, зокрема тривіальний стан, стан без продукції, однорідний та неоднорідний режими. Показано, що ці стани визначаються як розв'язки відповідної нелінійної алгебраїчної системи. Отримані результати можуть бути використані як основа для подальшого дослідження стійкості виробничої мережі та проведення чисельного моделювання її динамічної поведінки.

У подальших дослідженнях планується розширення отриманих результатів шляхом проведення чисельних обчислень, дослідження умов локальної та глобальної стійкості системи [16-19], а також побудови фазових площин, що дозволить більш повно проаналізувати динаміку функціонування виробничої мережі та отримати кількісні характеристики її поведінки.

1. Milisavljevic-Syed J., Allen J.K., Commuri S., Mistree F. Design of networked manufacturing systems for Industry 4.0 // Procedia CIRP. - 2019. - Vol. 81. - P. 1016-1021. DOI: 10.1016/j.procir.2019.03.244. 2. Mourtzis D., Doukas M., Psarommatis F. Manufacturing Network Design for Mass Customisation using a Genetic Algorithm and an Intelligent Search Method // Procedia CIRP. - 2013. - Vol. 7. - P. 37-42. DOI: 10.1016/j.procir.2013.05.007. 3. Cao W., Wang X., Ming Z., Gao J. A review on neural networks with random weights // Neurocomputing. - 2018. - Vol. 275. - P. 278-287. DOI: 10.1016/j.neucom.2017.08.040. 4. Dudek T., Dzhuguryan T., Lemke J. Sustainable production network design for city multi-floor manufacturing cluster // Procedia Computer Science. - 2019. - Vol. 159. - P. 2081-2090. DOI: 10.1016/j.procs.2019.09.381. 5. Arumugham A.J., Krishnaraj C., Parameswaran R. A review of mathematical models for supply chain network design // International Journal of Innovative Research in Advanced Engineering. - 2017. - Vol. 4. DOI: 10.26562/IJIRAE.2017.DCAE10083. 6. Davizon Y.A., Amillano-Cisneros J.M., Leyva-Morales J.B., Smith E.D., Sanchez-Leal J., Smith N.R. Mathematical modeling of dynamic supply chains subject to demand fluctuations // Engineering, Technology & Applied Science Research. - 2023. - Vol. 13, No. 6. - P. 12360-12365. DOI: 10.48084/etasr.6491. 7. Emadi S.H., Mirabi M. Enhancing supply chain coordination using mathematical modeling // Research Annals of Industrial and Systems Engineering. - 2024. -

Vol. 1, No. 4. - P. 276-284. DOI: 10.22105/raise.vi.75. 8. Ierapetritou M., Badejo D. A mathematical modeling approach for supply chain management under disruption and operational uncertainty // AIChE Journal. - 2022. DOI: 10.1002/aic.18037. 9. Yu J., Zhang J., Shu A., Chen Y., Chen J., Yang Y., Tang W., Zhang Y. Study of convolutional neural network-based semantic segmentation methods on edge intelligence devices for field agricultural robot navigation line extraction // Computers and Electronics in Agriculture. - 2023. - Vol. 209. DOI: 10.1016/j.compag.2023.107811. 10. Dashkovskiy S., Görges M., Kosmykov M., Mironchenko A., Naujok L. Modeling and stability analysis of autonomously controlled production networks // Logistics Research. - 2011. - Vol. 3. - P. 145-157. DOI: 10.1007/s12159-011-0049-6. 11. Weisbuch G., Battiston S. Production networks and failure avalanches // arXiv. - 2005. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0507101. 12. Glass D., Jin X., Riedel-Kruse I. Nonlinear delay differential equations and their application to modeling biological network motifs // bioRxiv. - 2020. DOI: 10.1101/2020.08.02.233619. 13. Cichoń M., Cichoń K. On mathematical models based on delay differential equations in epidemiology // Applied Sciences. - 2025. - Vol. 15, No. 18. - Art. 10267. DOI: 10.3390/app151810267. 14. Benítez-García I., Davizón Y.A., Hernandez-Santos C., de la Cruz N., Hernandez A., Quiñonez-Ruiz A., Smith E.D., Sánchez-Leal J., Smith N.R. Mathematical modeling and stability analysis of agri-food tomato supply chains via compartmental analysis // World. - 2025. - Vol. 6, No. 3. - Art. 129. DOI: 10.3390/world6030129. 15. Birkmaier A., Oberegger B., Felsberger A., Reiner G., Sihn W. Towards a robust digital production and logistics network by implementing flexibility measures // Procedia CIRP. - 2021. - Vol. 104. - P. 1310-1315. DOI: 10.1016/j.procir.2021.11.220. 16. Martsenyuk V., Klos-Witkowska A., Sverstiuk A. Stability, bifurcation and transition to chaos in a model of immunosensor based on lattice differential equations with delay // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. - 2018. - No. 27. - P. 1-31. DOI: 10.14232/ejqtde.2018.1.27. 17. Martsenyuk V.P., Andrushchak I.Ye., Zinko P.M., Sverstiuk A.S. On application of latticed differential equations with a delay for immunosensor modeling // Journal of Automation and Information Sciences. - 2018. - Vol. 50, No. 6. - P. 55-65. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i6.50. 18. Martsenyuk V.P., Sverstiuk A.S., Andrushchak I.Ye. Approach to the study of global asymptotic stability of lattice differential equations with delay for modeling of immunosensors // Journal of Automation and Information Sciences. - 2019. - Vol. 48, No. 8. - P. 58-71. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i2.70. 19. Марценюк В.П., Сверстюк А.С., Козодій Н.В., Давиденко Є.О. Дослідження фазових площин моделі імуносенсора на прямокутній решітці з використанням диференціальних рівнянь із запізненням в пакеті R // Вісник Черкаського державного технологічного університету. - 2019. - № 2. - С. 37-47. DOI: 10.24025/2306-4412.2.2019.172004.

 ISSN 2306-5478

REFERENCES

1. Milisavljevic-Syed J., Allen J.K., Commuri S., Mistree F. Design of networked manufacturing systems for Industry 4.0 // Procedia CIRP. - 2019. - Vol. 81. - P. 1016-1021. DOI: 10.1016/j.procir.2019.03.244. 2. Mourtzis D., Doukas M., Psarommatis F. Manufacturing Network Design for Mass Customisation using a Genetic Algorithm and an Intelligent Search Method // Procedia CIRP. - 2013. - Vol. 7. - P. 37-42. DOI: 10.1016/j.procir.2013.05.007. 3. Cao W., Wang X., Ming Z., Gao J. A review on neural networks with random weights // Neurocomputing. - 2018. - Vol. 275. - P. 278-287. DOI: 10.1016/j.neucom.2017.08.040. 4. Dudek T., Dzhuguryan T., Lemke J. Sustainable production network design for city multi-floor manufacturing cluster // Procedia Computer Science. - 2019. - Vol. 159. - P. 2081-2090. DOI: 10.1016/j.procs.2019.09.381. 5. Arumugham A.J., Krishnaraj C., Parameswaran R. A review of mathematical models for supply chain network design // International Journal of Innovative Research in Advanced Engineering. - 2017. - Vol. 4. DOI: 10.26562/IJIRAE.2017.DCAE10083. 6. Davizon Y.A., Amillano-Cisneros J.M., Leyva-Morales J.B., Smith E.D., Sanchez-Leal J., Smith N.R. Mathematical modeling of dynamic supply chains subject to demand fluctuations // Engineering, Technology & Applied Science Research. - 2023. - Vol. 13, No. 6. - P. 12360-12365. DOI: 10.48084/etasr.6491. 7. Emadi S.H., Mirabi M. Enhancing supply chain coordination using mathematical modeling // Research Annals of Industrial and Systems Engineering. - 2024. - Vol. 1, No. 4. - P. 276-284. DOI: 10.22105/raise.vi.75. 8. Ierapetritou M., Badejo D. A mathematical modeling approach for supply chain management under disruption and operational uncertainty // AIChE Journal. - 2022. DOI: 10.1002/aic.18037. 9. Yu J., Zhang J., Shu A., Chen Y., Chen J., Yang Y., Tang W., Zhang Y. Study of convolutional neural network-based semantic segmentation methods on edge intelligence devices for field agricultural robot navigation line extraction // Computers and Electronics in Agriculture. - 2023. - Vol. 209. DOI: 10.1016/j.compag.2023.107811. 10. Dashkovskiy S., Görges M., Kosmykov M., Mironchenko A., Naujok L. Modeling and stability analysis of autonomously controlled production networks // Logistics Research. - 2011. - Vol. 3. - P. 145-157. DOI: 10.1007/s12159-011-0049-6. 11. Weisbuch G., Battiston S. Production networks and failure avalanches // arXiv. - 2005. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0507101. 12. Glass D., Jin X., Riedel-Kruse I. Nonlinear delay differential equations and their application to modeling biological network motifs // bioRxiv. - 2020. DOI: 10.1101/2020.08.02.233619. 13. Cichoń M., Cichoń K. On mathematical models based on delay differential equations in epidemiology // Applied Sciences. - 2025. - Vol. 15, No. 18. - Art. 10267. DOI: 10.3390/app151810267. 14. Benítez-García I., Davizón Y.A., Hernandez-Santos C., de la Cruz N., Hernandez A., Quiñonez-Ruiz A., Smith E.D., Sánchez-Leal J.,

Smith N.R. Mathematical modeling and stability analysis of agri-food tomato supply chains via compartmental analysis // World. - 2025. - Vol. 6, No. 3. - Art. 129. DOI: 10.3390/world6030129. 15. Birkmaier A., Oberegger B., Felsberger A., Reiner G., Sihn W. Towards a robust digital production and logistics network by implementing flexibility measures // Procedia CIRP. - 2021. - Vol. 104. - P. 1310-1315. DOI: 10.1016/j.procir.2021.11.220. 16. Martsenyuk V., Klos-Witkowska A., Sverstiuk A. Stability, bifurcation and transition to chaos in a model of immunosensor based on lattice differential equations with delay // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. - 2018. - No. 27. - P. 1-31. DOI: 10.14232/ejqtde.2018.1.27. 17. Martsenyuk V.P., Andrushchak I.Ye., Zinko P.M., Sverstiuk A.S. On application of latticed differential equations with a delay for immunosensor modeling // Journal of Automation and Information Sciences. - 2018. - Vol. 50, No. 6. - P. 55-65. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i6.50. 18. Martsenyuk V.P., Sverstiuk A.S., Andrushchak I.Ye. Approach to the study of global asymptotic stability of lattice differential equations with delay for modeling of immunosensors // Journal of Automation and Information Sciences. - 2019. - Vol. 48, No. 8. - P. 58-71. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i2.70. 19. Марценюк В.П., Сверстюк А.С., Козодій Н.В., Давиденко Є.О. Дослідження фазових площин моделі імуносенсора на прямокутній решітці з використанням диференціальних рівнянь із запізненням в пакеті R // Вісник Черкаського державного технологічного університету. - 2019. - № 2. - С. 37-47. DOI: 10.24025/2306-4412.2.2019.172004.

Kit N.V.[1;],
Postgraduate Student
Sverstiuk A.S. [2;],
PhD, Professor
.

[1] Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ternopil
[2] Ternopil State Medical University by I.Ya. Horbachevsky, Ternopil

STEADY STATES FOR STUDYING A MATHEMATICAL MODEL OF A PRODUCTION NETWORK ON A SQUARE GRID USING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

The paper studies the mathematical modeling of production networks taking into account spatial structure and time delays. To describe logistics and production processes, a lattice model based on a system of differential equations with delay is proposed. The model allows taking into account the interaction between network nodes through the exchange of resources, as

 ISSN 2306-5478

well as the processes of their processing into products. On its basis, possible modes of system operation are studied. In particular, stationary states are considered, which correspond to stable modes of operation of the production network. Their main types are determined and it is established that they are given as solutions of the corresponding system of equations. The results obtained create the prerequisites for further research into the stability of the system and numerical analysis of its behavior.

Keywords: manufacturing network design, mathematical modeling, lattice model, differential equations with delay, stationary states, logistics systems, dynamic systems

Отримано: 31 січня 2026 року
Прорецензовано: 25 лютого 2026 року
Прийнято до друку: 27 березня 2026 року