УДК 519.21 https://doi.org/10.31713/vt1202624

Прищепа О.В. [1; ORCID ID: 0000-0001-8032-1223]**,**
к.ф.-м.н., доцент,

[1]Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ГІСТЕРЕЗИСНА СТРАТЕГІЯ КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕНИМ ЧИСЛОМ ПОВТОРІВ

В роботі розглядається задача оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку для багатоканальних систем з однією спробою повтору. Основну увагу приділено аналізу та формалізації гістерезисної стратегії керування, яка характеризується наявністю зон затримки при перемиканні режимів функціонування. Такий підхід дозволяє стабілізувати роботу системи в умовах значного навантаження та уникнути занадто частих перемикань між режимами. В умовах гістерезисного режиму керування знайдено явні формули для стаціонарних ймовірностей, на основі яких сформульовано та розв’язано оптимізаційну задачу, спрямовану на максимізацію функціоналу якості системи. Наведено числові приклади, що підтверджують ефективність та економічну доцільність застосування гістерезисних стратегій порівняно зі звичайними підходами.

Ключові слова: стохастична система з повторними викликами, процес обслуговування, стаціонарні ймовірності, гістерезисна стратегія, оптимізація.

Вступ. Сучасний етап розвитку комунікаційних технологій, мобільних мереж, хмарних обчислень та цифрових платформ обслуговування викликів характеризується стрімким зростанням обсягів трафіку та високою динамікою його надходження. За таких умов виникає гостра потреба у створенні ефективних математичних моделей, здатних адекватно описувати процеси функціонування складних технічних систем, що базуються на теорії систем з повторними викликами.

У класичній теорії систем масового обслуговування, зазвичай,

 ISSN 2306-5478

припускається, що вимога, яка надійшла в систему при зайнятості всіх каналів обслуговування, або стає в чергу та згодом обслуговується відповідно до визначеної дисципліни, або ж залишає систему без обслуговування. Інколи нетерплячі вимоги залишають чергу після деякого часу очікування, і тоді вони вважаються втраченими назавжди. Таким чином, класичні марковські моделі не беруть до уваги можливість повторного звернення вимог до системи, що суттєво обмежує їхнє застосування для розв'язку практично важливих задач проєктування сучасних мереж. Для подолання цього обмеження активно використовуються системи масового обслуговування з повторними викликами, в яких вимоги, що застали всі канали зайнятими, надходять до орбіти і через деякий випадковий час знову повертаються до системи, щоб отримати обслуговування [1; 2]. Особливе значення такі моделі мають для аналізу комп'ютерних та телекомунікаційних мереж, де нездійснені з'єднання (унаслідок зайнятості ліній чи серверів) ініціюють повторні спроби передачі даних або повторні дзвінки абонентів.

Зазвичай для систем з повторними викликами покладають, що повторне звернення здійснюються до тих пір, поки вимога не отримає обслуговування. На практиці це є лише певним наближенням до реальних процесів, оскільки технічні пристрої мають обмежені буфери повтору, а реальні абоненти мають ліміт «терпіння», через що число повторних звернень до системи завжди є обмеженим [3; 5; 6]. Саме тому дослідження систем з обмеженим числом повторних спроб отримати обслуговування є надзвичайно актуальним напрямом, особливо з точки зору оптимізації їхньої роботи та підвищення загальної якості обслуговування.

Додатковим інструментом підвищення ефективності таких систем є керування інтенсивністю вхідного потоку, зокрема, з урахуванням порогових та гістерезисних стратегії. Гістерезисна стратегія, завдяки наявності зони затримки при перемиканні режимів, дозволяє уникнути занадто частих перемикань, що стабілізує систему в умовах інтенсивних змін навантаження [4].

Математична модель. У даній роботі розглядається багатоканальна система масового обслуговування з обмеженою кількістю повторних спроб, а саме однією спробою повтору. Це означає, що вимога, яка тримала відмову, залишає систему та має можливість повторно звернутися для обслуговування лише один раз через деякий випадковий проміжок часу, який має показниковий розподіл з параметром ν . Якщо при повторному звернені всі прилади є зайняті, то вимога залишає систему назавжди. Ззовні вимоги надходять до системи з інтенсивністю λ_j, яка залежить, в свою чергу, від кількості джерел повторних викликів на поточний момент. Час обслуговування вимог є показниково розділеною випадковою величиною з параметром μ.

Змінна інтенсивність вхідного потоку в цій моделі дозволяє формулювати та розв'язувати оптимізаційні задачі на основі гістерезисних стратегій. Для цього фіксуються два невід'ємних цілих числа H_1 та H_2, які називаються порогами, $H_1 \le H_2$. Система змінює режим роботи залежно від кількості джерел повторних викликів. Якщо в деякий момент часу кількість джерел повторних викликів у системі не перевищує H_1, то вона функціонує в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_1. Якщо кількість джерел повторних викликів більша за H_2, то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_2. Якщо кількість джерел повторних викликів лежить у проміжку $(H_1, H_2]$, то система зберігає той режим, у якому вона функціонувала в попередній момент часу. При умові $H_1 = H_2$ дана стратегія трансформується у частинний випадок керування при пороговій стратегії.

За умови фіксованої стратегії керування (H_1, H_2) стан системи в довільний момент часу t може бути описаний тривимірним процесом $Q(t) = (Q_0(t), Q_1(t), R(t))$, $t \ge 0$, де $Q_0(t)$ – кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_1(t)$ – кількість джерел повторних викликів у момент часу t, $R(t)$ – режим роботи системи в момент часу t. Зокрема, значення $R(t) = 1$ відповідає першому режиму роботи з інтенсивністю вхідного потоку h_1, а $R(t) = 2$ – другому режиму з інтенсивністю вхідного потоку h_2 Для скорочення викладок будемо упускати позначення H_1, H_2. Процес $Q(t)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S(Q) = S^1(Q) \cup S^2(Q)$, де $S^1(Q) \cap S^2(Q) = \varnothing$, $S^1(Q) = \{(i, j, 1) : i = 0, 1, ..., c;\ j = 0, ..., H_2\}$, $S^2(Q) = \{(i, j, 2) : i = 0, 1, ..., c;\ j = H_1 + 1, ...\}$.

 ISSN 2306-5478

Для заданих $\mu, \nu, h_1, h_2 > 0$, інфінітезимальні характеристики $q_{(i,j,r)(i',j',r')}$, $(i,j,r),(i',j',r') \in S(Q)$ ланцюга $Q(t)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $[i=0,1,\dots,c-1,\ j=0,1,\dots,H_2,\ r=1] \vee$
$\vee [i=0,1,\dots,c-1,\ j=H_1+2,\dots,\ r=2]$, то

$$q_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_r, \text{ при } (i',j',r') = (i+1, j, r), \\ i\mu, \text{ при } (i',j',r') = (i-1, j, r), \\ j\nu, \text{ при } (i',j',r') = (i+1, j-1, r), \\ -(h_r + i\mu + j\nu), \text{ при } (i',j',r') = (i, j, r), \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

2) якщо $[i=c,\ j=0,1,\dots,H_2-1,\ r=1] \vee [i=c,\ j=H_1+2,\dots,\ r=2]$, то

$$q_{(c,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_r, \text{ при } (i',j',r') = (c, j+1, r), \\ c\mu, \text{ при } (i',j',r') = (c-1, j, r), \\ j\nu, \text{ при } (i',j',r') = (c, j-1, r), \\ -(h_r + c\mu + j\nu), \text{ при } (i',j',r') = (c, j, r), \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

3) якщо $i=c$, $j=H_2$, $r=1$, то

$$q_{(c,H_2,1)(i',j',r')} = \begin{cases} h_1, \text{ при } (i',j',r') = (c, H_2+1, 2), \\ c\mu, \text{ при } (i',j',r') = (c-1, H_2, 1), \\ H_2\nu, \text{ при } (i',j',r') = (c, H_2-1, 1), \\ -(h_1 + c\mu + H_2\nu), \text{ при } (i',j',r') = (c, H_2, 1), \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

4) якщо $i=0,1,\dots,c-1,\ j=H_1+1,\ r=2$, то

$$q_{(i,j,r)(i',j',r')} = \begin{cases} h_2, \text{ при } (i',j',r') = (i+1, H_1+1, 2), \\ i\mu, \text{ при } (i',j',r') = (i-1, H_1+1, 2). \\ (H_1+1)\nu, \text{ при } (i',j',r') = (i+1, H_1, 1), \\ -(h_2 + i\mu + (H_1+1)\nu), \text{ при } (i',j',r') = (i, j, r), \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

5) якщо $i=c$, $j=H_1+1$, $r=2$, то

$$q_{(c,H_1+1,2)(i',j',r')}=\begin{cases} h_2, \text{ при } (i',j',r')=(c,H_1+2,2), \\ c\mu, \text{ при } (i',j',r')=(c-1,H_1+1,2), \\ (H_1+1)\nu, \text{ при } (i',j',r')=(c,H_1,1), \\ -(h_2+c\mu+(H_1+1)\nu), \\ \quad \text{при } (i',j',r')=(c,H_1+1,2), \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

У подальших викладках будемо вважати $\mu,\nu,h_1,h_2>0$, що завжди виконуються на практиці. Відповідно, при виконанні цієї вимоги будемо казати, що параметри моделі невироджені і сама система невироджена.

Позначимо $\pi_{ij}(r)$, $(i,j,r)\in S(Q)$ стаціонарні ймовірності системи: $\pi_{ij}(r)=\lim\limits_{t\to\infty} P\{Q_0(t,)=i,Q_1(t)=j,R(t)=r\}$. Визначимо умови існування стаціонарного розподілу.

Лема 1. Якщо багатоканальна система типу $M/M/c/\infty$ з однією спробою повтору, керована гістерезисною стратегією, є невироджена, то для процесу обслуговування $Q(t)$, $t\geq 0$ системи з однією спробою повтору існує стаціонарний режим.

Доведення. Для доведення існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування $Q(t)$, $t\geq 0$ застосуємо теорему Твіді [2, с.97]. Для цього в якості тест-функцій Ляпунова розглянемо $\varphi(i,j,r)=j$, $(i,j,r)\in S(Q)$. Для них середній перенос визначається як

$$y_{ijr}=\sum_{(i',j',r')\neq(i,j,r)} a_{(i,j,r)(i',j',r')}\big(\varphi(i',j',r')-\varphi(i,j,r)\big).$$

Якщо врахувати вигляд інфінітезимальних характеристик ланцюга Маркова $Q(t)$, то достатньо перевірити випадки 1) при $i=0,1,\ldots,c-1$, $j=H_1+2,\ldots$, $r=2$ та 2) при $i=c$, $j=H_1+2,\ldots$, $r=2$, оскільки в інших випадках число точок (i,j,r) є скінченним.

Таким чином, середній перенос визначається наступним чином:

$$y_{ijr}=\begin{cases} -j\nu, \ \textit{при} \ i=0,1,\ldots,c-1, j=H_1+2,\ldots, \ r=2, \\ h_2-j\nu, \ \textit{при} \ i=c, j=H_1+2,\ldots, \ r=2. \end{cases}$$

 ISSN 2306-5478

При $h_1, h_2, \mu, \nu > 0$, $j = 0,1,\ldots$ виконуються умови теореми Твіді для тест-функцій, що розглядаються. Отже, відповідно до теореми процес обслуговування $Q(t)$ є регулярним, ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним розподілом. Лему доведено.

У загальному випадку для $c \geq 2$ та довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних розподілу неможливо. Через це розглядається урізана модель даної системи $M/M/c/N$, в якій скінченне число N місць для повторних викликів, що можуть зробити одну повторну пробу. Таким чином, якщо всі N місць зайнято, то вимога губиться та не отримує обслуговування.

При фіксованій гістерезисній стратегії (H_1, H_2) стан урізаної моделі аналогічно описується тривимірним марковським процесом з неперервним часом $Q^N(t,) = \left(Q_0^N(t), Q_1^N(t), R(t)\right)$, $t \geq 0,$ де компоненти визначають кількість зайнятих приладів у момент часу t, кількість джерел повторних викликів у момент часу t та режим роботи системи в момент часу t відповідно. Множина станів даного ланцюга є скінченною

$$S(Q^N) = S^1(Q^N) \cup S^2(Q^N),\ S^1(Q^N) \cap S^2(Q^N) = \varnothing,$$

де $S^1(Q^N) = \{(i, j, 1) : i = 0,1,\ldots, c;\ j = 0,1,\ldots, H_2\}$,

$$S^2(Q^N) = \{(i, j, 2) : i = 0,1,\ldots, c;\ j = H_1 + 1,\ldots, N\}.$$

Для заданих параметрів $h_1, h_2, \mu, \nu > 0$ інфінітезимальні характеристики $q^N_{(i,j,r)(i',j',r')}$, $(i, j, r), (i', j', r') \in S(Q^N)$ для $Q^N(t)$ визначаються аналогічно 1) – 5) для $Q(t)$, окрім випадку $i = c$, $j = N$, $r = 2$, коли

$$q^N_{(c,N,2)(i',j',r')} = \begin{cases} c\mu, \text{ при } (i', j', r') = (c-1, N, 2), \\ N\nu, \text{ при } (i', j', r') = (c, N-1, 2), \\ -(c\mu + N\nu), \text{ при } (i', j', r') = (c, N, 2), \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Оскільки множина станів процесу $Q^N(t)$ є скінченною, то для системи типу $M/M/c/N$ завжди існує стаціонарний режим.

Позначимо $\pi_{ij}^{N}(r)$, $(i,j,r)\in S(Q^{N})$ стаціонарні ймовірності системи:

$$\pi_{ij}^{N}(r)=\lim_{t\to\infty}P\{Q_0^N(t)=i,Q_1^N(t)=j,R(t)=r\}.$$

Ланцюги Маркова $Q(t)$ та $Q^N(t)$ є стохастично впорядкованими [2], тому при $N\to\infty$ виконується збіжність $\pi_{ij}^{N}(r)\to\pi_{ij}(r)$.

Дослідження стаціонарного розподілу. Введемо наступні позначення:

e_i – вектор-стовпець розмірності i, перший елемент якого дорівнює 1, а інші дорівнюють нулю;

$\overline{1}_i$ – одничний вектор-стовпець складений з одиниць розмірності i;

$I=\left\|\delta_{ij}\right\|_{i,j=0}^{c}$, де $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

$$\pi_j(r)=\left(\pi_{0j}(r),\pi_{1j}(r),\ldots,\pi_{cj}(r)\right)^T,$$

$$r=1,2;\pi_j^N(r)=\left(\pi_{0j}^N(r),\pi_{1j}^N(r),\ldots,\pi_{cj}^N(r)\right)^T,\ r=1,2;$$

$$A_j(r)=\left\|a_{ik}^{j}(r)\right\|_{i,k=0}^{c},\text{ де}$$

$$a_{ik}^{j}(r)=\begin{cases}h_r+i\mu+j\nu, & k=i,\ i=0,1,\ldots,c-1,\\ h_r+c\mu, & i=k=c,\\ -h_r, & k=i-1,\ i=1,,2,\ldots,c-1,\\ -\left(h_r+j\nu\right), & i=c,\ k=c-1,\\ -j\nu, & i=c,\ k=0,1,\ldots,c-2,\\ -(i+1)\mu, & k=i+1,\ i=0,1,\ldots,c-1,\\ 0, & \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

$B_j=\left\|b_{ik}^{j}\right\|_{i,k=0}^{c}$, де $b_{ik}^{j}=\begin{cases}(j+1)\nu, & k=i-1,\ i=1,2,\ldots,c,\\ (j+1)\nu, & k=c,\ i=c,\\ 0, & \text{в іншому випадку;}\end{cases}$

 ISSN 2306-5478

$$C_j = \left\| c_{ik}^j \right\|_{i,k=0}^c, \text{ де } c_{ik}^j = \begin{cases} (H_1+1)\nu, \ i=c, \ k=0,1,\dots,c, \\ 0, \ \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$D = \left\| d_{ik} \right\|_{i,k=0}^c, \text{ де } d_{ik} = \begin{cases} 1, \ i=0, \ k=0, \\ 0, \ i=0, \ k=1,2,\dots,c, \\ a_{i-1k}^N(2), \ \textit{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$G_j(r) = \sum_{k=j}^{H_2} \left(\prod_{i=j}^{k-1} A_i^{-1}(r) B_i \right) A_k^{-1}(r) C_k, \ r=1,2;$$

$$F_j(1) = \begin{cases} \prod_{i=j}^{H_1} A_i^{-1}(1) B_i \left(I + G_{H_1+1}(1) \right), \ j=0,1,\dots,H_1, \\ G_j(1), \ j=H_1+1,\dots,H_2 \end{cases}$$

(покладемо $F_{H_2+1}(1)$ дорівнює нульовій матриці);

$$F_j(2) = \left(I - G_j(2) \left(I + G_{H_1+1}(2) \right)^{-1} \prod_{i=H_1+1}^{j-1} A_i^{-1}(2) B_i \right) \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2) B_i,$$
$$j = H_1+1,\dots,N-1$$

(покладемо $F_N(2) = I$).

Для векторів стаціонарних ймовірностей $\pi_j^N(1)$, $j=0,1,\dots,H_2$ та $\pi_j^N(2)$, $j=H_1+1,\dots,N$ справедливий наступний результат. Будемо вважати, що $N > H_2$.

Теорема 1. Якщо для системи типу $M/M/c/N$ з однією повторною спробою, що керована гістерезисною стратегією, виконуються умови леми 1, то її стаціонарні розподіл можна подати у вигляді:

$$\pi_j^N(1) = \Delta_j^N(1) \pi_{00}^N(1), \ j=0,1,\dots,H_2, \tag{1}$$

$$\pi_j^N(2) = \Delta_j^N(2) \pi_{00}^N(1), \ j=H_1+1,\dots,N, \tag{2}$$

де

$$\Delta_j^N(1) = \left(e_{c+1}^T F_0(1) F_{H_1+1}(2) D^{-1} e_{c+1} \right)^{-1} F_j(1) F_{H_1+1}(2) D^{-1} e_{c+1},$$
$$j=0,1,\dots,H_2,$$

$$\Delta_j^N(2) = \left(e_{c+1}^T F_0(1) F_{H_1+1}(2) D^{-1} e_{c+1}\right)^{-1} F_j(2) D^{-1} e_{c+1},$$

$$j = H_1 + 1, \ldots, N,$$

$$\pi_{00}^N(1) = \left(\sum_{j=0}^{H_2} \overline{1}_{c+1}^T \Delta_j^N(1) + \sum_{j=H_1+1}^{N} \overline{1}_{c+1}^T \Delta_j^N(2)\right)^{-1}. \quad (3)$$

Доведення. Для побудови стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij}^N(r)$, $r = 1, 2$ використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі. Побудуємо розбиття фазового простору для кожного $j = 0, 1, \ldots, H_2$: $S(Q^N) = S_j^{(1)}(Q^N) \cup \overline{S}_j^{(1)}(Q^N)$, де $S_j^{(1)}(Q^N) = \{(i, m, 1) : m \le j\}$ та для кожного $j = H_1 + 1, \ldots, N - 1$: $S(Q^N) = S_j^{(2)}(Q^N) \cup \overline{S}_j^{(2)}(Q^N)$, де $S_j^{(2)}(Q^N) = \{(i, m, 2) : H_1 + 1 \le m \le j\}$. Прирівнявши потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}$ та границю області $S_j^{(2)}$ відповідно, знаходимо:

$$h_1 \pi_{cj}^N(1) = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{ij+1}^N(1), \quad j = 0, 1, \ldots, H_1 - 1, \quad (4)$$

$$h_1 \pi_{cj}^N(1) = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{ij+1}^N(1) + (H_1+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{iH_1+1}^N(2), \quad (5)$$

$$j = H_1, \ldots, H_2 - 1,$$

$$h_1 \pi_{cH_2}^N(1) = (H_1+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{iH_1+1}^N(2), \quad (6)$$

$$h_2 \pi_{cj}^N(2) + (H_1+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{iH_1+1}^N(2) = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{ij+1}^N(2), \quad (7)$$

$$j = H_1 + 1, \ldots, H_2,$$

$$h_2 \pi_{cj}^N(2) + (H_1+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{iH_1+1}^N(2) =$$

$$= h_1 \pi_{cH_2}^N(1) + (j+1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{ij+1}^N(2), \ j = H_2 + 1, \ldots, N - 1. \quad (8)$$

 ISSN 2306-5478

Побудувавши для $i = 0, 1, \ldots, c$, $j = 0, 1, \ldots, H_2$ розбиття фазового простору $S(Q^N) = S_{ij}^{(1)}(Q^N) \cup \overline{S}_{ij}^{(1)}(Q^N)$,де $S_{ij}^{(1)}(Q^N) = \{(i, j, 1)\}$ та використавши рівність потоків ймовірностей через границю області $S_{ij}^{(1)}(Q^N)$, отримаємо:

$$\begin{gathered}(h_1 + i\mu + j\nu)\pi_{ij}^N(1) = \\ = h_1\pi_{i-1j}^N(1) + (i+1)\mu\pi_{i+1j}^N(1) + (j+1)\nu\pi_{i-1j+1}^N(1), \\ j = 0, 1, \ldots, H_2 - 1,\ j \neq H_1,\ i = 0, 1, \ldots, c-1,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}(h_1 + i\mu + H_1\nu)\pi_{iH_1}^N(1) = h_1\pi_{i-1H_1}^N(1) + (i+1)\mu\pi_{i+1H_1}^N(1) + \\ + (H_1+1)\nu\pi_{i-1H_1+1}^N(1) + (H_1+1)\nu\pi_{i-1H_1+1}^N(2), \\ j = H_1,\ i = 0, 1, \ldots, c-1,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}(h_1 + i\mu + H_2\nu)\pi_{iH_2}^N(1) = h_1\pi_{i-1H_2}^N(1) + (i+1)\mu\pi_{i+1H_2}^N(1), \\ j = H_2,\ i = 0, 1, \ldots, c-1,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}(h_1 + c\mu + j\nu)\pi_{ij}^N(1) = h_1\pi_{c-1j}^N(1) + (j+1)\nu\pi_{c-1j+1}^N(1) + \\ (j+1)\nu\pi_{cj+1}^N(1) + h_1\pi_{cj-1}^N(1),\ j = 0, 1, \ldots, H_2 - 1,\ j \neq H_1,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}(h_1 + c\mu + H_1\nu)\pi_{cH_1}^N(1) = h_1\pi_{c-1H_1}^N(1) + \\ + (H_1+1)\nu\pi_{c-1H_1+1}^N(1) + (H_1+1)\nu\pi_{cH_1+1}^N(1) + (H_1+1)\nu\pi_{c-1H_1+1}^N(2) + \\ + (H_1+1)\nu\pi_{cH_1+1}^N(2) + h_1\pi_{cH_1-1}^N(1),\ j = H_1,\end{gathered} \tag{13}$$

$$(h_1 + c\mu + H_2\nu)\pi_{cH_2}^N(1) = h_1\pi_{c-1H_2}^N(1) + h_1\pi_{cH_2-1}^N(1),\ j = H_2. \tag{14}$$

В свою чергу для $i = 0, 1, \ldots, c$, $j = H_1 + 1, \ldots, N$ побудуємо розбиття фазового простору $S(Q^N) = S_{ij}^{(2)}(Q^N) \cup \overline{S}_{ij}^{(2)}(Q^N)$, де $S_{ij}^{(2)}(Q^N) = \{(i, j, 2)\}$. Відповідно до попередніх підходів знаходимо:

$$\begin{gathered}(h_2 + i\mu + j\nu)\pi_{ij}^N(2) = \\ = h_2\pi_{i-1j}^N(2) + (i+1)\mu\pi_{i+1j}^N(2) + (j+1)\nu\pi_{i-1j+1}^N(2), \\ j = H_1 + 1, \ldots, N-1,\ i = 0, 1, \ldots, c-1,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}(h_2 + i\mu + N\nu)\pi_{iN}^N(2) = h_2\pi_{i-1N}^N(2) + (i+1)\mu\pi_{i+1N}^N(2), \\ j = N,\ i = 0, 1, \ldots, c-1,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\left(h_2 + c\mu + j\nu\right)\pi_{cj}^N(2) =$$

$$= h_2\pi_{c-1j}^N(2) + \left(j+1\right)\nu\pi_{c-1j+1}^N(2) + \left(j+1\right)\nu\pi_{cj+1}^N(2) + h_2\pi_{cj-1}^N(2), \quad (17)$$

$$j = H_1 + 1, \ldots, N-1, \; j \neq H_2 + 1,$$

$$\left(h_2 + c\mu + \left(H_2+1\right)\nu\right)\pi_{cH_2+1}^N(2) =$$

$$= h_2\pi_{c-1H_2+1}^N(2) + \left(H_2+2\right)\nu\pi_{c-1H_2+2}^N(2) + \left(H_2+2\right)\nu\pi_{cH_2+2}^N(2) +$$

$$+ h_2\pi_{cH_2}^N(2) + h_1\pi_{cH_2}^N(1), \quad j = H_2 + 1, \quad (18)$$

За допомогою рівняння (6) спростимо рівняння (7) при $j = H_2$ та рівняння (8):

$$h_2\pi_{cH_2}^N(2) + h_1\pi_{cH_2}^N(1) = (H_2+1)\nu\bar{1}_{c+1}^T\pi_{H_2+1}^N(2), \quad (19)$$

$$h_2\pi_{cj}^N(2) = (j+1)\nu\bar{1}_{c+1}^T\pi_{j+1}^N(2), \; j = H_2 + 1, \ldots, N-1. \quad (20)$$

Отримані (19) та (20) використаємо для спрощення (17) при $j = H_1 + 2, \ldots, N-1$ та рівності (18):

$$\left(h_2 + c\mu\right)\pi_{cj}^N(2) = \left(h_2 + j\nu\right)\pi_{c-1j}^N(2) + j\nu\sum_{i=0}^{c-2}\pi_{ij}^N(2) +$$

$$+ \left(j+1\right)\nu\pi_{c-1j+1}^N(2) + \left(j+1\right)\nu\pi_{cj+1}^N(2), \quad j = H_2 + 1, \ldots, N-1. \quad (21)$$

Враховуючи позначення, запишемо систему рівнянь (15) та (21) для $j = H_2 + 1, \ldots, N-1$ у векторно-матричному вигляді

$$A_j(2)\pi_j^{(N)}(2) = B_j\pi_{j+1}^{(N)}(2), \; j = H_2 + 1, \ldots, N-1.$$

Звідси маємо

$$\pi_j^N(2) = \prod_{i=j}^{N-1} A_j^{-1}(2)B_j\pi_N^N(2), \quad j = H_2 + 1, \ldots, N-1 \quad (22)$$

Використовуючи рівняння (7), перепишемо (17) для $j = H_1 + 1, \ldots, H_2$:

$$\left(h_2 + c\mu\right)\pi_{cj}^N(2) = \left(h_2 + j\nu\right)\pi_{c-1j}^N(2) + j\nu\sum_{i=0}^{c-2}\pi_{ij}^N(2) +$$

$$+ \left(j+1\right)\nu\pi_{c-1j+1}^N(2) + \left(j+1\right)\nu\pi_{cj+1}^N(2) - (H_1+1)\nu\sum_{i=0}^{c}\pi_{iH_1+1}^N(2), \quad (23)$$

$$j = H_1 + 1, \ldots, H_2.$$

 ISSN 2306-5478

Використовуючи (23), запишемо систему (17) для $j = H_1 + 1, ..., H_2$ у векторно-матричному вигляді:

$$A_j(2)\pi_j^N(2) = B_j\pi_{j+1}^N(2) - C_j\pi_{H_1+1}^N(2), \; j = H_1 + 1, ..., H_2.$$

Звідси:

$$\pi_j^N(2) = \prod_{i=j}^{H_2} A_i^{-1}(2)B_i\pi_{H_2+1}^N(2) - G_j(2)\pi_{H_1+1}^N(2), \tag{24}$$

$$j = H_1 + 1, ..., H_2.$$

Використовуючи (22) при $j = H_2 + 1$, можемо подати (24) у такому вигляді

$$\pi_j^N(2) = \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2)B_i\pi_N^N(2) - G_j(2)\pi_{H_1+1}^N(2),$$

$$j = H_1 + 1, ..., H_2.$$

Звідси при $j = H_1 + 1$, знаходимо:

$$\pi_{H_1+1}^N(2) = \left(I + G_{H_1+1}(2)\right)^{-1} \prod_{i=H_1+1}^{N-1} A_i^{-1}(2)B_i\pi_N^N(2).$$

Таким чином, в результаті отримаємо:

$$\pi_j^N(2) = \left(I - G_j(2)\left(I + G_{H_1+1}(2)\right)^{-1} \prod_{i=H_1+1}^{j-1} A_i^{-1}(2)B_i \right) \times$$

$$\times \prod_{i=j}^{N-1} A_i^{-1}(2)B_i\pi_N^N(2), \; j = H_1 + 1, ..., H_2. \tag{25}$$

Об'єднання результатів (22) та (25) дає можливість записати

$$\pi_j^N(2) = F_j(2)\pi_N^N(2), \; j = H_1 + 1, ..., N - 1. \tag{26}$$

Враховуючи (5), запишемо рівняння (12) та (14) у вигляді

$$(h_2 + c\mu)\pi_{cj}^N(1) = (h_2 + j\nu)\pi_{c-1j}^N(1) + j\nu \sum_{i=0}^{c-2} \pi_{ij}^N(1) +$$

$$+ (j+1)\nu\pi_{c-1j+1}^N(1) + (j+1)\nu\pi_{cj+1}^N(1) + (H_1 + 1)\nu \sum_{i=0}^{c} \pi_{iH_1+1}^N(2), \tag{27}$$

$$j = H_1 + 1, ..., H_2 - 1.$$

$$(h_2 + c\mu)\pi_{cH_2}^N(1) = (h_2 + H_2\nu)\pi_{c-1H_2}^N(1) +$$

$$+H_2\nu\sum_{i=0}^{c-2}\pi_{iH_2}^N(1)+(H_1+1)\nu\sum_{i=0}^{c}\pi_{iH_1+1}^N(2),\ \ j=H_2. \quad (28)$$

Подання рівнянь (9), (12), (27) та (28) у векторно-матричному вигляді:

$$A_j(1)\pi_j^N(1)=B_j\pi_{j+1}^N(1)+C_j\pi_{H_1+1}^N(2),\ \ j=H_1+1,\dots,H_2-1,$$

$$A_{H_2}(1)\pi_{H_2}^N(1)=C_{H_2}\pi_{H_1+1}^N(2)$$

дає можливість отримати

$$\pi_j^N(1)=G_j(1)\pi_{H_1+1}^N(2),\ \ j=H_1+1,\dots,H_2. \quad (29)$$

Скористаємося рівнянням (4) для спрощення рівнянь (12) та (13). Отримаємо

$$(h_2+c\mu)\pi_{cj}^N(1)=(h_2+j\nu)\pi_{c-1j}^N(1)+j\nu\sum_{i=0}^{c-2}\pi_{ij}^N(1)+$$

$$+(j+1)\nu\pi_{c-1j+1}^N(1)+(j+1)\nu\pi_{cj+1}^N(1),\ \ j=0,,1,\dots,H_1-1. \quad (30)$$

$$(h_2+c\mu)\pi_{cH_1}^N(1)=$$

$$=(h_2+H_1\nu)\pi_{c-1H_1}^N(1)+H_1\nu\sum_{i=0}^{c-2}\pi_{iH_1}^N(1)+(H_1+1)\nu\pi_{c-1H_1+1}^N(1)+$$

$$+(H_1+1)\nu\pi_{cH_1+1}^N(1)+(H_1+1)\nu\pi_{c-1H_1+1}^N(2)+(H_1+1)\nu\pi_{cH_1+1}^N(2). \quad (31)$$

Для пошуку $\pi_{H_1}^N(1)$ використаємо рівняння (10), (31) та рівняння (29) для $j=H_1+1$. В результаті маємо

$$\pi_{H_1}^N(1)=A_{H_1}^{-1}(1)B_{H_1}\pi_{H_1+1}^N(1)+A_{H_1}^{-1}(1)B_{H_1}\pi_{H_1+1}^N(2)=$$

$$=A_{H_1}^{-1}(1)B_{H_1}\left(I+G_{H_1+1}(1)\right)\pi_{H_1+1}^N(2). \quad (32)$$

Також рівняння (9) та (30) для $j=0,1,\dots,H_1-1$ у векторно-матричній формі

$$A_j(1)\pi_j(1)=B_j\pi_{j+1}^N(1),\ \ j=0,1,\dots,H_1-1$$

дозволяє записати рекурентного співвідношення для $\pi_j^N(1)$

$$\pi_j^N(1)=\prod_{i=j}^{H_1-1}A_i^{-1}(1)B_i\pi_{H_1}^N(1).$$

 ISSN 2306-5478

При цьому, якщо скористатися рівнянням (32), то отримаємо наступне

$$\pi_j^N(1)=\prod_{i=j}^{H_1} A_i^{-1}(1)B_i\left(I+G_{H_1+1}(1)\right)\pi_{H_1+1}^N(2),\ j=0,1,\dots,H_1.$$

Таким чином,

$$\pi_j^N(1)=F_j(1)\pi_{H_1+1}^N(2)=F_j(1)F_{H_1+1}(2)\pi_N^N(2),\ j=0,1,\dots,H_2.$$

Перейдемо до знаходження $\pi_{0N}^N(2)$. Для цього додамо до рівнянь (16) тотожність $\pi_{0N}^N(2)=\pi_{0N}^N(2)$ і запишемо їх у векторно-матричному вигляді

$$D\pi_N^N(2)=\pi_{0N}^N(2)e_{c+1}.$$

Звідси маємо:

$$\pi_j^N(1)=\pi_{0N}^N(2)F_j(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1},\ j=0,1,\dots,H_2, \quad (33)$$

$$\pi_j^N(2)=\pi_{0N}^N(2)F_j(2)D^{-1}e_{c+1},\ j=H_1+1,\dots,N. \quad (34)$$

Для $j=0$ із формули (33) знаходимо

$$\pi_0^N(1)=\pi_{0N}^N(2)F_0(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1}. \quad (35)$$

Використовуючи (35), можна записати ймовірності $\pi_{0N}^N(2)$ через $\pi_{00}^N(1)$:

$$\pi_{0N}^N(2)=\left(e_{c+1}^T F_0(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1}\right)^{-1}\pi_{00}^N(1)$$

Тоді

$$\pi_j^N(1)=\Delta_j^N(1)\pi_{00}^N(1),\ j=0,1,\dots,H_2,$$

$$\pi_j^N(2)=\Delta_j^N(2)\pi_{00}^N(1),\ j=H_1+1,\dots,N,$$

де

$$\Delta_j^N(1)=\left(e_{c+1}^T F_0(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1}\right)^{-1}F_j(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1},$$
$$j=0,1,\dots,H_2,$$

$$\Delta_j^N(2)=\left(e_{c+1}^T F_0(1)F_{H_1+1}(2)D^{-1}e_{c+1}\right)^{-1}F_j(2)D^{-1}e_{c+1},$$
$$j=H_1+1,\dots,N$$

З умови нормування знаходимо:

$$\pi_{00}^{N}(1)=\left(\sum_{j=0}^{H_2}\overline{1}_{c+1}^{T}\Delta_{j}^{N}(1)+\sum_{j=H_1+1}^{N}\overline{1}_{c+1}^{T}\Delta_{j}^{N}(2)\right)^{-1}.$$

Отримані рівності відповідають (1)-(3), що і доводить теорему 1.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку при керуванні гістерезисною стратегією в даній моделі дає можливість ставити і розв’язувати для неї оптимізаційні задачі. Розглянемо оптимізаційну задачу

$$\begin{gathered}L(H_1,H_2)=C_1L_1(H_1,H_2)+C_2L_2(H_1,H_2)-C_3L_3(H_1,H_2)-\\-C_4L_4(H_1,H_2)-C_5L_5(H_1,H_2)\to max\\H_1,H_2\in\{0,1,...\},\ H_1\le H_2,\end{gathered}\tag{36}$$

де C_1 – прибуток, пов’язаний з обслуговуванням однієї вимоги при роботі системи в першому режимі; C_2 – прибуток, пов’язаний з обслуговуванням однієї вимоги при роботі системи в другому режимі; C_3 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_4 – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку, C_5 – штраф за втрату вимоги після невдалої повторної спроби, $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}L_i(t,H_1,H_2)=L_i(H_1,H_2)$, $i=1,2,...,5$; $L_1(t,H_1,H_2)$ – число вимог, обслуговування яких завершено за час t при роботі системи у першому режимі; $L_2(t,H_1,H_2)$ – число вимог, обслуговування яких завершено за час t при роботі системи у другому режимі; $L_3(t,H_1,H_2)$ – число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $L_4(t,H_1,H_2)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; $L_5(t,H_1,H_2)$ – число вимог, які залишили систему без обслуговування після невдалої повторної спроби.

В умовах існування стаціонарного режиму функціонали $L_i(H_1,H_2)$, $i=1,2,..,5$ існують і можуть бути виписані через стаціонарні імовірності, які подані у теоремі 1 та будуть також залежати від двох змінних H_1 та H_2:

$$L_1(H_1,H_2)=\mu\sum_{j=0}^{H_2}\sum_{i=1}^{c}i\pi_{ij}(1),\ \ L_2(H_1,H_2)=\mu\sum_{j=H_1+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{c}i\pi_{ij}(2),$$

 ISSN 2306-5478

$$L_3(H_1,H_2)=\sum_{j=0}^{H_2} h_1\pi_{cj}(1)+\sum_{j=H_1+1}^{\infty} h_2\pi_{cj}(2),$$

$$L_4(H_1,H_2)=h_1\pi_{cH_2}(1)+(H_1+1)\nu\sum_{i=0}^{c}\pi_{iH_1+1}(2),$$

$$L_5(H_1,H_2)=\nu\left(\sum_{j=1}^{H_2} j\pi_{cj}(1)+\sum_{j=H_1+1}^{\infty} j\pi_{cj}(2)\right).$$

Розв'язком задачі (36) є такі пороги H_1 та H_2 , що максимізують середній прибуток від роботи системи.

Результати. Розглянемо стохастичну систему з наступними параметрами: $c=2$, $h_1=8$, $h_2=3$, $\mu=3$, $\nu=3$ у випадку керування інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій. Вартісні коефіцієнти візьмемо наступні: $C_1=96$, $C_2=75$, $C_3=8$, $C_4=4$, $C_5=45$. Розв'язком оптимізаційної задачі є пороги $H_1=3$ та $H_2=6$, при яких досягається максимальне значення функціоналу та становить $286{,}32$. Ефективність функціонування системи, яка керована гістерезисною стратегією, визначається кращим значенням функціоналу якості. Вона суттєво переважає класичну порогову стратегії керування [5] та забезпечує збільшення прибутку відповідно на $13{,}9\%$. Це свідчить про доцільність введення гістерезису для зменшення кількості перемикань та оптимізації витрат системи.

Висновки. В даній роботі ми провели дослідження багатоканальної системи з однією спробою повтору та змінною інтенсивністю вхідного потоку. Враховано, що перемикання інтенсивності вхідного потоку здійснюється відповідно до гістерезисної стратегії керування. Отримано представлення для стаціонарних ймовірностей у векторно-матричному вигляді. Побудовано та розв'язано оптимізаційну задачу оптимального вибору параметрів системи. Функціонал якості подано в явному вигляді через стаціонарні ймовірності. Проаналізовано ефективність керування у класі гістерезисних стратегій.

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 317 p. **2.** Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997. 317 p. **3.** Lebedev, E.A., Ponomarov, V.D., Pryshchepa, O.V. On Multiserver State-Dependent Retrial Queues Operating in Stationary Regime. *Communications in Computer and Information*

Science. 2021. Vol. 1391. P. 95–107. **4.** Ponomarov V. Exact formulas for Markov retrial queues controlled by hysteresis strategies. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*. 2024. **5.** Pryshchepa O., Kardash O., Yakymchuk A., Shvec M., Pavlov K., Pavlova O., Irtyshcheva I., Popadynets N., Boiko Ye. and Kramarenko I. Optimization of multi-channel queuing systems with a single retail attempt: Economic approach. *Decision Science Letters*. 2020. Vol.9. №4. P. 559–564. DOI:10.5267/j.dsl.2020.8.002. **6.** Shin Y. W., Moon D. H. Retrial queues with limited number of retrials: Numerical investigations. 7th Intern. Symposium on Operations Research and Its Applications ISORA'08. 2008. P. 237–247.

REFERENCES

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 317 p. **2.** Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997. 317 p. **3.** Lebedev, E.A., Ponomarov, V.D., Pryshchepa, O.V. On Multiserver State-Dependent Retrial Queues Operating in Stationary Regime. *Communications in Computer and Information Science*. 2021. Vol. 1391. P. 95–107. **4.** Ponomarov V. Exact formulas for Markov retrial queues controlled by hysteresis strategies. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*. 2024. **5.** Pryshchepa O., Kardash O., Yakymchuk A., Shvec M., Pavlov K., Pavlova O., Irtyshcheva I., Popadynets N., Boiko Ye. and Kramarenko I. Optimization of multi-channel queuing systems with a single retail attempt: Economic approach. *Decision Science Letters*. 2020. Vol.9. №4. P. 559–564. DOI:10.5267/j.dsl.2020.8.002. **6.** Shin Y. W., Moon D. H. Retrial queues with limited number of retrials: Numerical investigations. 7th Intern. Symposium on Operations Research and Its Applications ISORA'08. 2008. P. 237–247.

Pryshchepa O.V. [1; ORCID ID: 0000-0001-8032-1223]**,**
PhD, Associate Professor,

[1] National University of Water and Environmental Engineerin, Rivne

HYSTERESIS CONTROL STRATEGY FOR QUEUES WITH A LIMITED NUMBER OF RETRIALS

The paper considers the problem of optimal control of the input flow intensity for multi-channel systems with a single retry attempt.

 ISSN 2306-5478

This study is extremely relevant for modern telecommunication networks and cloud services, where dynamic load fluctuations require adaptive resource control mechanisms to ensure high-quality service. The focus is on the analysis and formalisation of the hysteresis control strategy, which is characterised by delay zones during mode switching. This approach stabilises system operation under heavy load conditions and avoiding frequent switching between operating modes. With this strategy, the service process is simulated using a three-dimensional continuous-time Markov chain. The complexity of choosing a research method depends significantly on the number of service devices, the number of repeated attempts, and the control strategy. The situation is complicated by the fact that the phase space of the multi-dimensional service process is unlimited, and special approaches should be developed for its analysis. Therefore, to find stationary probabilities, the method of approximation of the system by the corresponding system with a finite phase space was used, and stationary probabilities were constructed in vector-matrix form. It is assumed that the stationary probabilities of the truncated model approximate those of the model with an unlimited phase space, since the corresponding service processes are migration processes. An optimisation problem aimed at maximising the system's quality is formulated and solved. The simulation results confirm the effectiveness and economic feasibility of hysteresis strategies compared to conventional approaches, making them a promising tool for controlling input flows.

Keywords: stochastic system with repeated calls, service process, stationary probabilities, hysteresis strategy, optimization.

Отримано: 11 січня 2026 року
Прорецензовано: 25 лютого 2026 року
Прийнято до друку: 27 березня 2026 року