



## ГІДРОТЕХНІЧНЕ БУДІВНИЦТВО, ВОДНА ІНЖЕНЕРІЯ ТА ВОДНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 532.5

<https://doi.org/10.31713/vt420251>

**Хлапук М. М.** [1; ORCID ID: 0000-0001-5469-4181],

д.т.н., професор

**Волощук В. А.** [1; ORCID ID: 0000-0003-0687-8968],

д.т.н., завідувач кафедри

<sup>1</sup>Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

<sup>2</sup>Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

### ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ГІДРОТЕХНІЧНОГО ТА МЕЛІОРАТИВНОГО БУДІВНИЦТВА

У статті проведено аналіз сучасних математичних підходів до розв'язання задач теорії фільтрації, що виникають при проектуванні та будівництві гідротехнічних і меліоративних споруд. Розглянуто застосування фундаментальних рівнянь руху підземних вод, зокрема рівнянь Буссінеска, Пуассона та Лапласа (Форхгеймера), для моделювання безнапірної фільтрації в однорідних середовищах. Особливу увагу приділено методам розрахунку систематичного дренажу та визначенню припливу води до дрен у неоднорідних ґрунтах. Проаналізовано проблему «недосконалості» дренажних конструкцій за характером розкриття пласта, що зумовлена наявністю непроникних стінок труб та надходженням води через перфорацію або стикові зазори. Наведено математичні залежності для визначення додаткового фільтраційного опору, що враховують конструктивні особливості різних типів дрен. Акцентовано увагу на тому, що існуючі методики базуються на припущенні стабільності коефіцієнта фільтрації, що не дозволяє повною мірою враховувати динамічні суфозійні процеси в ґрунтах.

**Ключові слова:** теорія фільтрації; гідротехнічне будівництво; трубчастий дренаж; рівняння Буссінеска; додатковий фільтраційний опір; суфозія.

Актуальність дослідження зумовлена стрімким розвитком гідроенергетичного, гідротехнічного та меліоративного будівництва, що потребує вдосконалення математичних методів розрахунку фільтраційних процесів. Теорія фільтрації на сучасному етапі є фундаментом для вирішення складних інженерних завдань,

пов'язаних із рухом води в основах споруд, ґрунтових греблях та дренажних мережах. У меліоративній практиці, зокрема при осушенні надлишково зволжених земель, ефективність роботи систем прямо залежить від точності встановлення закономірностей руху ґрунтових вод, які описуються рівняннями безнапірної фільтрації.

Важливою науково-технічною проблемою залишається врахування конструктивної недосконалості сучасних дрен. Більшість існуючих аналітичних розв'язків базуються на моделі «ідеальної» дрени як порожнини в ґрунті, тоді як реальні конструкції мають непроникні стінки, а приплив води здійснюється лише через перфораційні отвори або стикові зазори. Це створює додатковий фільтраційний опір, який необхідно враховувати для коректного визначення питомої витрати та запобігання помилкам при проектуванні систем у різних геологічних умовах, включаючи неоднорідно-шаруваті ґрунти.

Крім того, актуальність роботи підкріплюється необхідністю критичного перегляду традиційних припущень у математичному моделюванні. Сучасні методи розрахунку переважно базуються на гіпотезі про сталість коефіцієнта фільтрації в часі, що не дозволяє повною мірою врахувати динамічні суфозійні процеси, викликані рухом води. Таким чином, дослідження математичних основ теорії фільтрації з урахуванням реальних умов експлуатації споруд є необхідним кроком для підвищення надійності та довговічності гідротехнічних і меліоративних об'єктів.

**Метою дослідження** є систематизація існуючих математичних підходів до розв'язання прикладних задач теорії фільтрації, що виникають при проектуванні гідротехнічних і меліоративних споруд. У роботі ставиться завдання дослідити ефективність застосування класичних рівнянь руху підземних вод для розрахунку параметрів систематичного дренажу в однорідних та неоднорідно-шаруватих ґрунтах. Особлива увага приділяється визначенню впливу конструктивної недосконалості дрен на приплив води та обґрунтуванню необхідності врахування динамічних суфозійних процесів, які обмежують застосування традиційних моделей зі сталим коефіцієнтом фільтрації.

Теорія фільтрації оформилась в самостійну область прикладної механіки завдяки вимогам гідроенергетичного та гідротехнічного будівництва, розвитку нафтової та газової промисловості.



За допомогою різних методів розв'язання задач теорії фільтрації з використанням, наприклад, наведених рівнянь були вирішені проблеми гідротехнічного та меліоративного будівництва, пов'язані з фільтрацією в основах споруд, в ґрунтових греблях, поблизу водоймищ, з каналів, довкола свердловин та дрен тощо [1–5; 7].

Підкреслимо той факт, що методи теорії фільтрації широко використовувались в такій сфері водного господарства, як гідромеліорація, завдяки значним об'ємам дренажу земель. В меліоративній практиці при осушенні надлишково зволжених земель широко застосовується трубчастий дренаж. Розрахунок відстані між дренажними лініями пов'язаний, в першу чергу, з встановленням закономірностей руху води в ґрунті, які описуються, наприклад, рівняннями безнапірної фільтрації при наявності (відсутності) на поверхні депресії стоків або витоків. Таке рівняння відоме під назвою рівняння Буссінеска [1–5; 7] і для випадку неусталеного руху рідини в однорідному середовищі на горизонтальному водоупорі має вид

$$\operatorname{div}(h\nabla h) = \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{k}, \quad (1)$$

або

$$\nabla^2(h^2) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{2\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{2q}{k}, \quad (2)$$

відповідно в циліндричних координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rh \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) = \frac{\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{q}{k}, \quad (3)$$

де  $h$  – напір;  $\mu$  – коефіцієнт водовіддачі або водонасичення відповідно при опусканні або піднятті кривої депресії;  $q$  – інтенсивність стоків (витоків).

Для усталеного руху рівняння з живленням (2) дає рівняння Пуассона

$$\nabla^2(h^2) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{2q}{k}. \quad (4)$$

Якщо живлення відсутнє ( $q=0$ ), то рівняння (4) перетворюється в рівняння Лапласа, яке, в даному випадку, відоме як рівняння Форхгеймера

$$\nabla^2(h^2) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (5)$$

Лінеаризовані різними способами рівняння Буссінеска широко застосовуються при розрахунку динаміки ґрунтових вод при осушенні та зволоженні, наприклад, Ш.І. Брусилівським, А.І. Івицьким, В.С. Кремезом, В.Ф. Мітіним, А.І. Мурашко, О.Я. Олійником, Г.А. Пісецьким, О.П. Тельцовим, Л.О. Холодок, М.Г Хубларяном, а при дослідженні фільтрації до свердловин та вертикальних колодязів – В.І. Аравіним та С.М. Нумеровим, В.С. Усенко, В.М. Шестаковим та іншими [7–15].

Задача про фільтрацію із вільною поверхнею важко піддається розв'язку через нелінійність граничних умов. В той же час точний математичний розв'язок не завжди самоціль, тому що самі диференціальні рівняння, граничні та початкові умови, допущення про однорідність, ізотропність, характер живлення (опади, випаровування), як правило, наближені. В зв'язку з цим були розроблені наближені методи розрахунку. До них відноситься, наприклад, метод (теорія) Дюп'юї-Форхгеймера, який вперше був запропонований Дюп'юї для дослідження стаціонарних потоків до свердловин і дренажних галерей і узагальнений Форхгеймером. М.М. Павловський розповсюдив цей метод на фільтрацію в гідротехнічних спорудах і в їх основах. Для меліоративного дренажу відомі наближення теорії Дюп'юї-Форхгеймера, виконані Хоугхаудтом, Кіркгемом, Весселінгом, Лістом, Хаммадом, С.Ф. Авер'яновим та іншими [1–7].

Для розрахунку стаціонарної осесиметричної фільтрації до свердловин та дрен використовується метод стоків та витоків [1–7]. Так, наприклад, В.В. Ведерніковим [1–3] отримані розв'язки задачі притоку до систематичного дренажу, що працює в підрусловому режимі, зокрема, залежності для обчислення питомої витрати до дрени (порожнини в ґрунті)

$$q_o = \frac{2\pi k_o \Delta H}{\Phi_o}, \quad (6)$$

і швидкості (градієнта напору) в будь-якій точці області фільтрації

$$\vec{V}_z(x, y) = V_x(x, y) - iV_y(x, y) = -i \frac{4k_o \Delta h K \alpha \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(2Kz/B; k)}}{\Phi_o B [\alpha^2 + (1 - \alpha^2) \operatorname{sn}^2(2Kz/B; k)]}, \quad (7)$$

де  $\Phi_o = 2 \operatorname{Arth} \sqrt{\operatorname{sn}(2Kh/B; k_1) / \operatorname{sn}(2K(h+d)/B; k_1)}$ ;

$\alpha = \sqrt{\operatorname{sn}(2Kh/B; k_1) \cdot \operatorname{sn}(2K(h+d)/B; k_1)}$ ;

$K$  – повний еліптичний інтеграл по модулю  $k$ ;  $k_1 = \sqrt{1 - k^2}$ ;  $sh(\dots)$  – еліптичний синус (функція Якобі);  $th(\dots)$  – гіперболічний тангенс;



$\Delta H$  – різниця напорів;  $h$  – відстань від поверхні ґрунту до верха дрени;  $d$  – діаметр дрени;  $B$  – відстань між дренами;  $x$  – абсциса, що співпадає з поверхнею ґрунту;  $y$  – ордината, що направлена вертикально вниз і проходить через центр дрени.

Аналогічні розв'язки для неоднорідно-шаруватих ґрунтів отримані О.Я.Олійником і, наприклад, для випадку припливу до систематичного підруслового дренажу, закладеного у верхній шар двохшарового ґрунту з водоупором, відповідні формули мають вид

$$q = 2\pi k_1 \Delta H \left( \ln \frac{sh 2\delta(b - 0.5r_o)}{\delta r_o} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln \frac{sh^2 2\delta n m_o}{sh 2\delta(n m_o + b) sh 2\delta(n m_o - b)} \right)^{-1}, \quad (8)$$

$$V_x = \frac{q \sin 2\delta x}{2B} \left[ \frac{1}{A_+} - \frac{1}{A_-} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n W_n(x) \right], \quad (9)$$

$$V_y = -\frac{q}{2B} \left[ \frac{A_+^o}{A_+} - \frac{A_-^o}{A_-} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n W_n(y) \right], \quad (10)$$

де

$$W_n(x) = \frac{1}{A_{n-}} - \frac{1}{A_{n+}} + \frac{1}{B_{n-}} - \frac{1}{B_{n+}};$$

$$W_n(y) = \frac{A_{n-}^o}{A_{n-}} - \frac{A_{n+}^o}{A_{n+}} + \frac{B_{n-}^o}{B_{n-}} - \frac{B_{n+}^o}{B_{n+}};$$

$$A_{\pm}^o = sh 2\delta(y \pm b); \quad A_{n\pm}^o = sh 2\delta(y - 2nm_o \pm b); \quad \delta = \pi/B;$$

$$A_{\pm} = ch 2\delta(y \pm b) - \cos 2\delta x; \quad A_{n\pm} = ch 2\delta(y - 2nm_o \pm b) - \cos 2\delta x;$$

$$B_{n\pm}^o = sh 2\delta(y + 2nm_o \pm b); \quad B_{n\pm} = ch 2\delta(y + 2nm_o \pm b) - \cos 2\delta x;$$

$sh(\dots)$ ,  $ch(\dots)$  – відповідно гіперболічний синус та косинус.

Значення коефіцієнта  $a_n$  обчислюється наступним чином:  $a_v=0$  при  $v < p_1$ ;  $a_{p_1}=\lambda$  при  $n=p_1$ ;  $a_v=0$  при  $p_1 < v < p$ ;  $a_p=1-x^2$  при  $n=p$ ;  $a_v=-\lambda$   $a_{v-p_1}$   $a_{v-p}$   $a_{v-p+1}$  при  $v > p$ ;  $\lambda=(k_1-k_2)/(k_1+k_2)$ ;  $p_1=m_1/m_o$ ;  $p_2=(m_1+m_2)/m_o$ . В цих залежностях  $k_1$ ,  $k_2$  і  $m_1$ ,  $m_2$  – відповідно коефіцієнти фільтрації та товщини верхнього і нижнього шарів ґрунту;  $m_o$  – найбільший спільний дільник  $m_1$  і  $m_2$ ;  $b$  – глибина закладання дрени (відстань від поверхні ґрунту до осі дрени);  $r_o$  – радіус дрени.

Наведені та інші розв'язки задач фільтрації в абсолютній своїй більшості справедливі для випадку «ідеальної» або досконалої дрени, під якою розуміється пориста дренажна труба або «труба» без стінок (порожнина в ґрунті). Практично всі дренажні труби, що застосовуються, мають непроникні стінки, а ґрунтова вода надходить крізь перфораційні отвори чи стикові зазори. Такі дренажні

конструкції називаються недосконалими за характером розкриття пласта.

Задача визначення припливу до перфорованих дренажних труб, розташованих в радіальному потоці, в загальному випадку є просторовою, а рівняння фільтрації в циліндричних координатах, що застосовується для стаціонарних задач має вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

яке отримане з рівняння Лапласа (5) введенням потенціала швидкості фільтрації  $\varphi = -kh$ .

А.І. Мурашко [7], використавши рівняння (11) при відповідних граничних умовах, отримав розв'язки задач фільтрації до різних чином перфорованих труб. Для витрати ним запропонована загальна залежність

$$q = \frac{2\pi k_o \Delta H}{\Phi_o + \Phi_i}, \quad (12)$$

де  $\Phi_o = \ln(R_o/r_o) \approx \ln(2b/r_o)$  – фільтраційний опір при фільтрації до досконалої дрени;  $\Phi_i$  – додатковий фільтраційний опір (за А.І. Мурашко, коефіцієнт), що враховує недосконалість дрен за характером розкриття пласта.

Наприклад, для дрени з однією суцільною поздовжньою щілиною шириною  $\tau$  ним отримана залежність для додаткового фільтраційного опору у вигляді

$$\Phi_i = \ln \frac{E+1}{E-n}, \quad E = \sqrt{\frac{ch^2 \ln(R_o/r_o) - \cos^2(\arcsin(\tau/2r_o))}{ch^2 \ln(R_o/r_o) - 1}}, \quad (13)$$

де  $n = \cos(\arcsin(\tau/2r_o))$ ;  $R_o$  – радіус впливу.

М. Маскет [3] для дрен з поздовжньо-паралельними щілинами шириною  $\tau = 2t_o$  і довжиною  $l = 2l_1$ , що розташовуються по твірній з кроком  $s = 2s_1$  в  $m$  рядів по колу, отримав залежність

$$\Phi_i = \frac{1}{m} \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_o(2\pi n \rho_n) \frac{\sin 2\pi n h}{2\pi n} + \ln \frac{\rho_w}{\rho_n} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} K_o(4\pi n \rho_c) \sin \frac{\theta_i}{2} \frac{\sin 2\pi n h}{2\pi n} - \sum_{i=1}^{m-1} \ln 2 \sin \frac{\theta_i}{2} \right], \quad (1.22)$$

а для труб з круглою перфорацією діаметром  $d_n$

$$\Phi_i = \frac{1}{m} \left[ 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_o(2\pi n \rho_n) + \ln \frac{\rho_c}{\rho_n} + \right.$$



$$+ 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} K_1(4\pi n \rho_w) \sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{2\pi n}{m} - \sum_{i=1}^{m-1} \ln 2 \sin \frac{\theta_i}{2} \Big], \quad (14)$$

де  $h=l/2s_1$ ;  $\rho_n = \tau/2s_1$  ( $\rho_n = d_n/2s_1$ );  $\rho_c = r_o/s_1$ ;  $\rho_w = R_o/s_1$ ;  $K_0(2\pi n \rho_n)$ ,  $K_1(4\pi n \rho_w)$  – модифіковані функції Беселя 1-го роду, нульового і першого порядку;  $\theta_i$  – кут між вертикальною віссю  $z$  та  $i$ -тим рядом перфорації.

Для випадку стикового зазору  $\tau$  в керамічних трубах довжиною  $S$  Д. Кіркгем отримав розв'язок крайової задачі і для додаткового фільтраційного опору ним пропонується залежність

$$\Phi_i = \frac{S^2}{\pi^2 r_o \tau} S(r, z), \quad (15)$$

$$S(r, z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi\tau}{S} R_o(ar) \cos \frac{2n\pi z}{S}, \quad (16)$$

$$R_o(ar) = \frac{K_o(aR_o)I_o(ar) - I_o(aR_o)K_o(ar)}{K_o(aR_o)I_1(ar_o) - I_o(aR_o)K_1(ar_o)}, \quad (17)$$

де  $a=2n\pi/S$ ;  $r, z$  – координати області фільтрації;  $K_0, K_1, I_0, I_1$  – відповідно модифіковані функції Беселя 1-го роду нульового та першого порядку і 2-го роду нульового та першого порядку.

Як бачимо з наведених рівнянь, всі методи теорії фільтрації, що застосовуються для розв'язання задач гідротехнічного та меліоративного будівництва, оснований на припущенні, що коефіцієнт фільтрації ґрунту постійний і незмінний в часі. Суфозійні процеси, які викликані саме фільтрацією і впливають на її параметри, такими математичними моделями не можуть бути враховані.

**Висновки.** Теорія фільтрації на сучасному етапі є фундаментальною базою для розв'язання практичних завдань у галузі гідроенергетичного, гідротехнічного та меліоративного будівництва. Основними математичними інструментами для моделювання руху підземних вод залишаються рівняння Буссінеска для неусталених процесів, а також рівняння Пуассона та Лапласа для стаціонарних станів. Ці методи дозволяють із певною точністю розраховувати параметри фільтрації в основах споруд, ґрунтових греблях та дренажних мережах. Важливим аспектом проектування меліоративних систем є врахування конструктивної недосконалості дрен. Оскільки реальні дренажні труби мають непроникні стінки, а вода потрапляє всередину лише через перфораційні отвори або стикові зазори, класичні розв'язки для «ідеальних» дрен потребують

коригування. Для цього доцільно використовувати методики розрахунку додаткового фільтраційного опору, розроблені А.І. Мурашком, М. Маскетом та Д. Кіркгемом, що дозволяють адаптувати математичні моделі до специфіки конкретних видів перфорації. Попри значну кількість розроблених наближених та аналітичних методів, ключовим обмеженням сучасних моделей є припущення про незмінність коефіцієнта фільтрації ґрунту в часі. Такий підхід не дозволяє враховувати динамічні суфозійні процеси, що виникають під впливом фільтраційного потоку та безпосередньо змінюють фізико-механічні характеристики середовища. Подальший розвиток галузі потребує розробки математичних моделей, здатних інтегрувати ці зміни для підвищення точності прогнозних розрахунків.

1. Аравін В. І., Нумеров С. М. Теорія руху рідин і газів у недеформованому пористому середовищі. Москва : Гостехиздат, 1953. 616 с.
2. Ведерніков В. В. Теорія фільтрації та її застосування в галузі іригації та дренажу. Москва : Держбудвидав, 1939. 248 с.
3. Мурашко А. І. Сільськогосподарський дренаж у гумідній зоні. Москва : Колос, 1982. 272 с.
4. Khlapak M. M., Klimov S. V., Bezusiak O. V., Shumlyanskyi A. O. Experimental study of the effect of hydraulic gradient on soil hydraulic conductivity. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2024. Vol. 1415, No. 1. P. 012090. doi: 10.1088/1755-1315/1415/1/012090.
5. Douglas K. J. et al. Experimental investigation of global backward erosion and suffusion. *Can. Geotech. J.* 2019. Vol. 56.
6. Аналіз теоретичних досліджень механічної суфозії та кольматажу в дренажних системах / М. М. Хлапук, С. В. Клімов, А. А. Білецький та ін. *Вісник НУВГП. Технічні науки*. Рівне : НУВГП, 2025. Вип. 1(109). С. 95–116.
7. Хлапук М. М. Теоретичні основи фільтрації в середовищах, що деформуються : дис. ... д-ра техн. наук. Рівне, 1999. 406 с.
8. Cao L., Li X., Li Z., Liu J., Li J., Lv X. Influence of drainage flow velocity on microscopic cohesive soil erosion and macroscopic road collapse evolution: A case study in Beijing, China. *Eng. Fail. Anal.* 2024. Vol. 164. P. 108698. doi: 10.1016/j.engfailanal.2024.108698.
9. Liang Y., Yeh T.-C. J., Zha Y., Wang J., Liu M., Hao Y. Onset of suffusion in gap-graded soils under upward seepage. *Soils Found.* 2017. Vol. 57, No. 5. P. 849–860. doi:10.1016/j.sandf.2017.08.017.
10. Xie Q., Liu J., Han B., Li H., Li Y., Li X. Critical Hydraulic Gradient of Internal Erosion at the Soil-Structure Interface. *Processes*. 2018. Vol. 6, No. 7. Art. 92. doi: 10.3390/pr6070092.
11. Дмитрієв А. Ф., Хлапук М. М., Дмитрієв Д. А. Процеси деформації незв'язаних ґрунтів у придренажній зоні та їх вплив на роботу дренажно-зрошувальних систем : монографія. Рівне : РДТУ, 2002. 125 с.
12. Federico F. Particle Migration Phenomena Related to Hydromechanical Effects at Contact between Different Materials in Embankment Dams. *Granular Materials. IntechOpen*, 2017. doi: 10.5772/67785.
13. Bridle R., Fell R. Internal erosion of existing dams, levees and dykes, and their foundations. *ICOLD Bulletin*. 2013. Vol. 164.
14. Huang Z., Xu H., Bai Y., Zhang B., Liu J. Hydromechanics-based prediction of suffusion development in spatially random soil structures. *Eng. Geol.* 2024. Vol. 341. P. 107725. doi:10.1016/j.enggeo.2024.107725.
15. Lee H.-J., Kim I.-H., Chung C.-K. Experimental Assessment on the Internal Instability of Broadly Graded Silty Sand. *KSCE J. Civ. Eng.* 2022. Vol. 26, No. 4. P. 1643–



1651. doi: 10.1007/s12205-022-0924-5.

## REFERENCES:

- 1.** Aravin V. I., Numerov S. M. Teoriia rukhu ridyn i haziv u nedeforovanomu porystomu seredovyshchi. Moskva : Hostekhyzdat, 1953. 616 s.
  - 2.** Vedernikov V. V. Teoriia filtratsii ta yii zastosuvannia v haluzi iryhatsii ta drenazhu. Moskva : Derzhbudvydav, 1939. 248 s.
  - 3.** Murashko A. I. Silskohospodarskyi drenazh u humidnii zoni. Moskva : Kolos, 1982. 272 s.
  - 4.** Khlapuk M. M., Klimov S. V., Bezusiak O. V., Shumlyanskyi A. O. Experimental study of the effect of hydraulic gradient on soil hydraulic conductivity. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.* 2024. Vol. 1415, No. 1. P. 012090. doi: 10.1088/1755-1315/1415/1/012090.
  - 5.** Douglas K. J. et al. Experimental investigation of global backward erosion and suffusion. *Can. Geotech. J.* 2019. Vol. 56.
  - 6.** Analiz teoretychnykh doslidzhen mekhanichnoi sufozii ta kolmatazhu v drenazhnykh systemakh / M. M. Khlapuk, S. V. Klimov, A. A. Biletskyi ta in. Visnyk NUVHP. Tekhnichni nauky. Rivne : NUVHP, 2025. Vyp. 1(109). S. 95–116.
  - 7.** Khlapuk M. M. Teoretychni osnovy filtratsii v seredovyshchakh, shcho deformuiutsia : dys. ... d-ra tekhn. nauk. Rivne, 1999. 406 s.
  - 8.** Cao L., Li X., Li Z., Liu J., Li J., Lv X. Influence of drainage flow velocity on microscopic cohesive soil erosion and macroscopic road collapse evolution: A case study in Beijing, China. *Eng. Fail. Anal.* 2024. Vol. 164. P. 108698. doi: 10.1016/j.engfailanal.2024.108698.
  - 9.** Liang Y., Yeh T.-C. J., Zha Y., Wang J., Liu M., Hao Y. Onset of suffusion in gap-graded soils under upward seepage. *Soils Found.* 2017. Vol. 57, No. 5. P. 849–860. doi:10.1016/j.sandf.2017.08.017.
  - 10.** Xie Q., Liu J., Han B., Li H., Li Y., Li X. Critical Hydraulic Gradient of Internal Erosion at the Soil-Structure Interface. *Processes.* 2018. Vol. 6, No. 7. Art. 92. doi: 10.3390/pr6070092.
  - 11.** Dmytriiev A. F., Khlapuk M. M., Dmytriiev D. A. Protsesy deformatsii nezviazanykh gruntiv u prydrnazhnii zoni ta yikh vplyv na robotu drenazhno-zroshuvalnykh system : monohrafiia. Rivne : RDTU, 2002. 125 s.
  - 12.** Federico F. Particle Migration Phenomena Related to Hydromechanical Effects at Contact between Different Materials in Embankment Dams. *Granular Materials. IntechOpen*, 2017. doi: 10.5772/67785.
  - 13.** Bridle R., Fell R. Internal erosion of existing dams, levees and dykes, and their foundations. *ICOLD Bulletin.* 2013. Vol. 164.
  - 14.** Huang Z., Xu H., Bai Y., Zhang B., Liu J. Hydromechanics-based prediction of suffusion development in spatially random soil structures. *Eng. Geol.* 2024. Vol. 341. P. 107725. doi:10.1016/j.enggeo.2024.107725.
  - 15.** Lee H.-J., Kim I.-H., Chung C.-K. Experimental Assessment on the Internal Instability of Broadly Graded Silty Sand. *KSCE J. Civ. Eng.* 2022. Vol. 26, No. 4. P. 1643–1651. doi: 10.1007/s12205-022-0924-5.
-

**Khlapuk M. M.** [1; ORCID ID: 0000-0001-5469-4181],  
Doctor of Engineering, Professor,  
**Voloshchuk V. A.** [1; ORCID ID: 0000-0003-0687-8968],  
Doctor of Engineering, Head of Department

<sup>1</sup>*National University of Water and Environmental Engineering, Rivne*

<sup>2</sup>*National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»*

## **FEATURES OF APPLYING THE MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF FILTRATION THEORY FOR SOLVING PROBLEMS IN HYDRAULIC AND RECLAMATION CONSTRUCTION**

The article presents a comprehensive analysis of modern mathematical approaches to modeling filtration processes, which are critical for the design, construction, and operation of hydraulic and reclamation facilities. The authors treat filtration theory as a fundamental field of applied mechanics, the development of which is inextricably linked to the demands of the hydropower and oil and gas industries. The main part of the study is devoted to the systematization of differential equations describing groundwater flow. The application of the Boussinesq equation for describing unsteady fluid flow in homogeneous media on a horizontal confining bed is considered in detail. The authors provide analytical expressions for Cartesian and cylindrical coordinate systems, allowing for the adaptation of the mathematical apparatus to various types of filtration domains. Special attention is paid to boundary cases: the transition to the Poisson equation under steady-state conditions with existing recharge, and to the Laplace (Forchheimer) equation in the absence of infiltration recharge. A significant portion of the work is dedicated to the analysis of reclamation drainage calculation methods. The authors analyze the evolution of the Dupuit-Forchheimer theory and its adaptation for hydraulic engineering needs by N. N. Pavlovsky. Applied solutions for calculating water inflow to systematic drainage under complex conditions, particularly in heterogeneous stratified soils, are examined based on the methods of V. V. Vedernikov and O. Ya. Oliynyk. The central scientific problem raised by the authors is the structural imperfection of drains regarding the nature of formation exposure. It is demonstrated that classical models of an "ideal" drain (a cavity in the soil) fail to account for the actual structure of modern pipes with impermeable walls, where inflow occurs through perforations or joints. The article presents and analyzes mathematical dependencies by A. I. Murashko, M. Muskat, and D. Kirkham to determine the additional filtration resistance arising in such structures. The study's critical conclusion indicates that current methodologies are based on the assumption of a constant filtration coefficient over time. The authors argue that suffosion processes, triggered



**by the water flow itself, dynamically alter the parameters of the medium, which cannot be adequately described by existing static models. The article holds high practical significance for engineers and scientists, as it outlines the transition toward developing dynamic filtration models that account for soil mass deformation and drain clogging (colmatation).**

**Keywords:** filtration theory; hydraulic structures; pipe drainage; Boussinesq equation; additional filtration resistance; suffusion.

Отримано: 08 вересня 2025 року  
Прорецензовано: 10 вересня 2025 року  
Прийнято до друку: 18 грудня 2025 року