

## УДК 621. 855

**Ляшук О. Л., к.т.н., Клендій В. М., к.т.н.** (Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, м. Тернопіль), **Кондратюк Д. Г., к.т.н., доцент, Дмитренко В. П., асистент** (Вінницький національний аграрний університет, м. Вінниця), **Кондратюк О. М., к.т.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ «СУЦІЛЬНЕ СЕРЕДОВИЩЕ – ПРУЖНИЙ ШНЕКОВИЙ ГВИНТ»**

**Досліджено залежність амплітуди коливань системи «середовище – пружний гвинт» при переході через резонанс за різних значень погонної маси середовища при різних швидкостях руху, фізико-механічних властивостей матеріалу і умов існування резонансних коливань за дії періодичного збурення на систему. Виведено залежність резонансних коливання системи «сипке середовище – пружний гвинт», які описуються співвідношеннями  $a(t)$  та  $\vartheta(t)$ .**

**Ключові слова:** пружний гвинт, коливання, амплітуда, швидкість.

**Для привідних елементів** системи гвинтових механізмів «суцільне середовище – пружний шнековий гвинт» потрібно ще на стадії проектування визначати спектр власних частот, вибрати параметри та режими експлуатації таким чином, щоб уникнути резонансних явищ у них, а значить, забезпечити довготривалу їх експлуатацію. Дослідити це можна тільки на основі побудови та аналізу розв'язків математичних моделей, які адекватні динамічному процесу.

**Огляд останніх джерел досліджень і публікацій.** Динаміка середовища у горловині шнекової машини значною мірою визначає якість кінцевого виробу, мова йде про щільність упаковки компонентів брикету, його однорідність структуру і т.д. Тому важливою задачею, яка передує процесу формування середовища у брикеті є його динаміка в області шнека. Задачі про переміщення середовищ вздовж різних поверхонь розглядалися на базі багатьох гіпотез: від руху системи матеріальних точок вздовж поверхні (Г. Лінднер [1; 4-5]) до суцільного середовища [6-9] нульової (аналог рідини) чи скінченої жорсткості (аналог пружного тіла).

**Постановка завдання.** Дослідити амплітуду коливань транспор-

тного середовища при проходженні головного резонансу за різних швидкостей руху робочого органу в екструдері.

**Основний матеріал і результати.** Для описання динаміки досліджуваної системи можна використати загальні принципи побудови математичних моделей динаміки механічних систем [2; 3]. Відповідно до них розглянемо динамічну рівновагу умовно виділеного елемента системи «середовище – пружне тіло». Його активні, пасивні та сила інерції вказані на рис. 1.

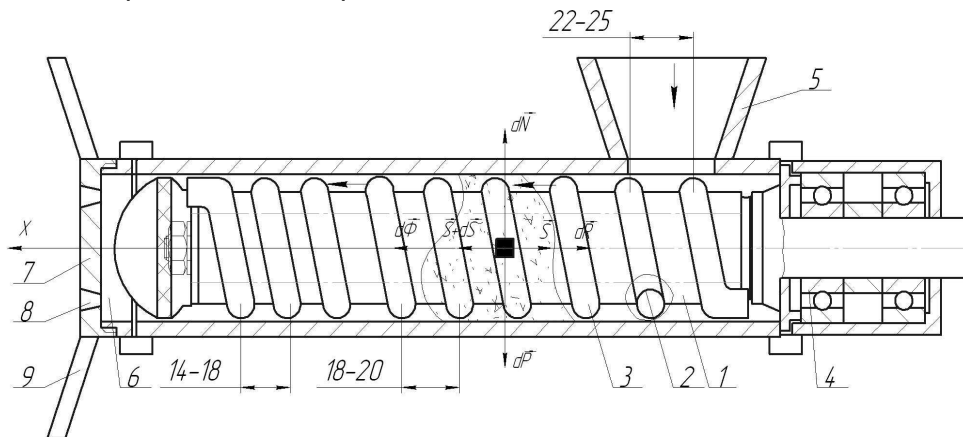


Рис. 1. Розрахункова схема середовище – пружний шнековий робочий орган екструдера: 1 – вал; 2 – гвинтова канавка; 3 – гвинтова пружина; 4 – циліндричний корпус; 5 – завантажувальним бункером; 6 – зона вивантаження; 7 – гайка; 8 – калібруючі отвори; 9 – рукоятка;  $d\vec{P}$  – вага виділеного елемента;  $d\vec{N}$  – нормальна реакція;  $d\vec{R}$  – сила опору;  $d\vec{\Phi}$  – сила інерції відносного руху вказаного елемента середовища разом із гвинтовою спіраллю;  $\vec{S}$  – зусилля, яке діє на правий кінець виділеного елемента зі сторони відсіченої частини пружного гвинта;  $\vec{S} + d\vec{S}$  – зусилля, яке діє на лівий кінець виділеного елемента зі сторони відсіченої частини пружного гвинта

Приймаючи до уваги, що у запропонованій моделі системи відсутня депланція нормальних плоских перерізів пружного тіла, для однозначного визначення переміщення довільного його перерізу достатньо знати переміщення центру цього перерізу. Таким чином, за розрахункову модель слід прийняти одновимірне пружне тіло вздовж якого рухається суцільне середовище. Для нього переміщення центру ваги перерізу із координатою  $x$  в довільний момент часу  $t$  однозначно визначається функцією  $u(x, t)$ . Побудувати точний розв'язок рівняння за крайових умов без додаткових обмежень щодо розподілу маси середовища вздовж шнеку, відносної складової швидкості руху його вздовж спіралі, сили опору, амплітуди гармоніч-

ного збурення і т.д. є на сьогодні не розв'язаною задачею. Тому нижче накладемо на основні характеристики розглядуваної механічної системи деякі обмеження, які притаманні реально існуючим шнековим машинам, а саме:

- розподіл мас суцільного середовища та шнекової спіралі вздовж її довжини шнеку є повільно змінними функціями лінійної змінної  $x$ , тобто  $\rho_1(x) = \rho_{10} + \mu\rho_{11}(x)$ ,  $\rho_2(x) = \rho_{20} + \mu\rho_{21}(x)$  ( $\rho_{11}(x)$ ,  $\rho_{12}(x)$  – відомі неперервні функції);

- максимальне значення сили опору є величиною порядку  $\mu$  у порівнянні із максимальним значенням відновлювальної сили, тобто

$$\max EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \gg \max R \left( \frac{du(x,t)}{dt} \right);$$

- амплітуда зовнішнього збурення правого кінця шнекової спіралі є малою величиною у порівнянні із амплітудою коливань самої шнекової спіралі із суцільним середовищем.

Наведене у сукупності дозволяє математичну модель динаміки «суцільне середовище – шнековий гвинт» представити у дещо спрощеній формі, а саме

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\rho_{20}}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{(EA - \rho_{20}) \partial^2 u(x,t)}{\rho_{10} + \rho_{20} \partial x^2} = \mu f_1 \left( x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{x=0} = \mu h_0 \sin \theta,$$

$$u(x,t)|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

де

$$f_1 \left( x, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) = \frac{1}{\rho_{10} + \rho_{20}} \left\{ -\rho_{21}(x) \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{(EA - \rho_{20}) \partial^2 u(x,t)}{\rho_{10} + \rho_{20} \partial x^2} \right] + \right. \\ \left. + A \frac{\partial}{\partial x} f \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} \right) - R \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right) - \rho_{21}(x) \left[ 2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} V + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} V^2 + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{dV}{dt} \right] \right\}.$$

Ліва частина наведеного диференціального рівняння є лінійною, до того ж зі сталими коефіцієнтами, а праві частини рівняння (1) та крайових умов (2) – пропорційні малому параметру, а це означає, що для побудови розв'язку вказаної задачі можна використати загальні ідеї наближених аналітичних методів – методів збурень [3].

При дослідженні резонансу обмежимося розглядом тільки самої резонансної області.

Перш за все покажемо, що для першого наближення заміною змінних

$$u(x, t) = v(x, t) + \mu w(x, t) \quad (3)$$

автономне рівняння (1) за неавтономних крайових умов (2) можна привести до неавтономного рівняння однак за однорідних крайових умов. Дійсно, якщо вважати, що функція  $w(x, t)$  є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

та задовольняє крайові умови неавтономного типу

$$\begin{aligned} w(x, t)|_{x=0} &= h_0 \sin(\omega t + \varphi), \\ w(x, t)|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

тоді функція  $v(x, t)$  повинна бути розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{2\rho_{20}}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} V - \frac{(EA - \rho_{20})}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \\ &= \mu \left\{ f_1 \left( x, \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} \right) - \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\rho_{20}}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x \partial t} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

і задовольняти однорідні крайові умови

$$\begin{aligned} v(x, t)|_{x=0} &= 0, \\ v(x, t)|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Оскільки знайти розв'язок крайової задачі (4), (5) не становить труднощів:  $w(x, t) = \frac{h_0}{l} (l - x) \sin(\omega t + \varphi)$ , то, із урахуванням наведеного, диференціальне рівняння (6) набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{2\rho_{20}}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} V - \frac{(EA - \rho_{20})}{\rho_{10} + \rho_{20}} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \mu \left\{ \tilde{f}_1 \left( x, \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x}, \theta \right) \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 \left( x, \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x}, \theta \right) &= f_1 \left( x, \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}, \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} \right) + \\ \text{де} &+ \frac{h_0}{l} (l - x) \omega^2 \sin \theta + \frac{2\rho_{20} V \omega h_0}{\rho_{10} + \rho_{20} l} \cos \theta. \end{aligned}$$

В такому разі задача полягає у побудові резонансного розв'язку рівняння (8) за однорідних умов (7). Для визначення основних спів-

відношень, які описують вказані коливання використаємо основну ідею методу Ван-дер-Поля адаптовану для систем із розподіленими параметрами. Приймаючи до уваги, що у резонансному випадку основні параметри, які визначають коливний процес значною мірою залежать від різниці фаз власних та вимушених коливань, введемо формально вказаний параметр ( $\vartheta(t) = \phi(t) - \theta(t) \rightarrow \phi(t) = \theta(t) + \vartheta(t)$ ) у розв'язок рівняння (8), і отримаємо:

$$v(x, t) = a(t)(\cos(Kx + \theta(t) + \vartheta(t)) - \cos(Hx - \theta(t) - \vartheta(t))). \quad (9)$$

Таким чином, базу для визначення основних амплітудно-частотних характеристик динамічного процесу є диференціальні рівняння (8) та розв'язок у формі (9). З урахуванням наведеного вище, шляхом диференціювання його за змінними  $t, x$ , отримуємо:

$$v_t(x, t) = a\vartheta_t[-\sin(Kx + \vartheta + \theta) - \sin(Hx - \vartheta - \theta)] + a_t[\cos(Kx + \vartheta + \theta) - \cos(Hx - \vartheta - \theta)] - a\frac{r}{s}\omega[-\sin(Kx + \vartheta + \theta) + \sin(Hx - \vartheta - \theta)];$$

$$v_{tt}(x, t) = a_{tt}[\cos(Kx + \vartheta + \theta) - \cos(Hx - \vartheta - \theta)] - 2a_t(\frac{r}{s}\omega + \vartheta_t) \times \\ \times [\sin(Kx + \vartheta + \theta) + \sin(Hx - \vartheta - \theta)] - a\vartheta_{tt}[\sin(Kx + \vartheta + \theta) + \sin(Hx - \vartheta - \theta)] - a(\frac{r}{s}\omega + \vartheta_t)^2[\cos(Kx + \vartheta + \theta) - \cos(Hx - \vartheta - \theta)]; \quad (10)$$

$$v_{xt}(x, t) = a_t[-K \sin(Kx + \vartheta + \theta) + H \sin(Hx - \vartheta - \theta)] - a(\frac{r}{s}\omega + \vartheta_t)[K \cos(Kx + \vartheta + \theta) + H \cos(Hx - \vartheta - \theta)];$$

$$v_{xx}(x, t) = a[-K^2 \cos(Kx + \vartheta + \theta) + H^2 \cos(Hx - \vartheta - \theta)].$$

Якщо підставити отримані вирази у диференціальне рівняння (8), отримаємо для першого наближення систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій  $a_t$  та  $\vartheta_t$

$$a_t \{-2\omega \sin(Kx + \vartheta + \theta) - 2\omega \sin(Hx - \vartheta - \theta) - 2V \sin(Kx + \vartheta + \theta) + \\ + 2V H \sin(Hx - \vartheta - \theta)\} + a \left( \vartheta_t + \frac{r}{s} \omega \right) \{-2\omega \cos(Kx + \vartheta + \theta) + \\ + 2\omega \cos(Hx - \vartheta - \theta) - 2VK \cos(Kx + \vartheta + \theta) - 2VH \cos(Hx - \vartheta - \theta)\} = \mu \tilde{f}_1(a, x, \vartheta + \theta, \theta). \quad (11)$$

Після нескладних перетворень із (11) маємо:

$$\begin{aligned}
 & \cos(\vartheta + \theta) \left\{ a_t [(-2\omega - 2VK) \sin Kx + (-2\omega + 2VH) \sin Hx] + \right. \\
 & + a \left( \vartheta_t + \frac{r}{s} \omega - \Omega \right) [(-2\Omega - 2VK) \cos Hx + (2\Omega - 2VH) \cos Hx] \left. \right\} + \quad (12) \\
 & + \sin(\vartheta + \theta) \left\{ a \left( \vartheta_t + \frac{r}{s} \omega - \Omega \right) [(2\Omega + 2VK) \sin Kx + (2\Omega - 2VH) \sin Hx] + \right. \\
 & + a_t [(-2\Omega - 2VK) \cos Kx - (-2\Omega + 2VH) \cos Hx] \left. \right\} = \mu \tilde{f}_1(a, x, \vartheta + \theta, \theta).
 \end{aligned}$$

Останнє співвідношення визначає основні параметри коливань розглядуваної системи, а саме, після усереднення [10], зв'язок між амплітудою та різницею фаз набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
 a_t = \frac{\mu}{2\pi [(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \int_0^l \left( \Psi(x) \int_0^{2\pi} \tilde{f}_1(a, x, \vartheta + \theta, \theta) \cos(\vartheta + \theta) d\theta + \right. \\
 \left. + \Theta(x) \int_0^{2\pi} \tilde{f}(a, x, y, \vartheta + \theta, \theta) \sin(\vartheta + \theta) d\theta \right) dx; \quad (13)
 \end{aligned}$$

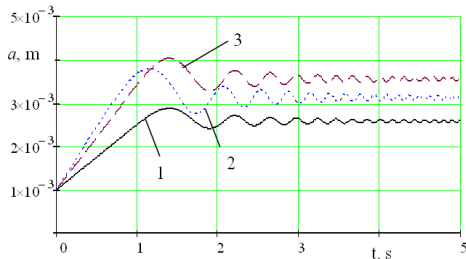
$$\begin{aligned}
 \vartheta_t = \Omega - \frac{r}{s} \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi a [(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \int_0^l \left( \Psi(x) \int_0^{2\pi} \tilde{f}_1(a, x, \vartheta + \theta, \theta) \sin(\vartheta + \theta) d\theta - \right. \\
 \left. - \Theta(x) \int_0^{2\pi} \tilde{f}_1(a, x, \vartheta + \theta, \theta) \cos(\vartheta + \theta) d\theta \right) dx,
 \end{aligned}$$

де функції  $\Psi(x)$  та  $\Theta(x)$  визначені залежностями.

Таким чином, у першому наближенні резонансні коливання системи «сипке середовище – пружний гвинт» описуються співвідношенням (9), а параметри  $a(t)$  та  $\vartheta(t)$ , що входять у них, визначаються залежностями (13). На базі цих співвідношень побудовано залежності зміни в часі амплітуди за швидкого переходу через резонанс.

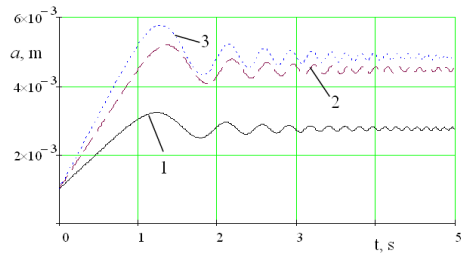
#### Висновки:

- для більших значень швидкості відносного руху суцільного середовища значення резонансної амплітуди є меншим;
- для більших значень погонної маси суцільного середовища резонансне значення амплітуди є більшим;
- для пружних гвинтів більшої жорсткості резонансна амплітуда має місце для більшого значення частоти вимушуючої сили;
- більшим значенням амплітуди коливань правого кінця шнекового гвинта відповідає більше значення резонансної амплітуди;



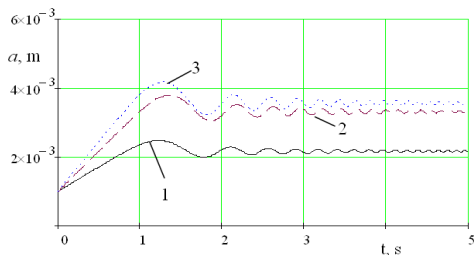
погонна маса: 1-  $\rho_w = 0$ ; 2-  $\rho_w = 3 \text{ кг/м}$ ; 3-  $\rho_w = 5 \text{ кг/м}$

а)



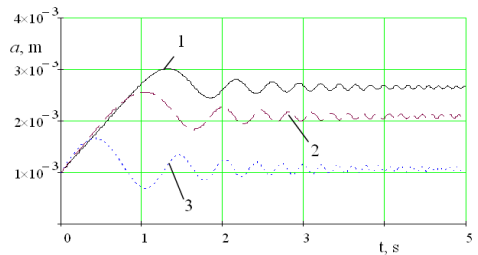
погонна маса: 1-  $\rho_w = 0$ ; 2-  $\rho_w = 3 \text{ кг/м}$ ; 3-  $\rho_w = 5 \text{ кг/м}$

б)



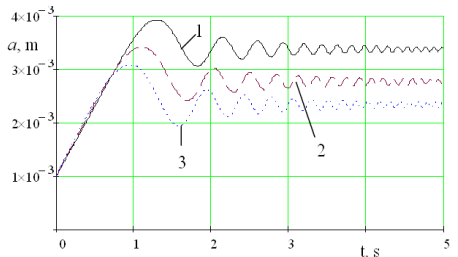
погонна маса: 1-  $\rho_w = 0$ ; 2-  $\rho_w = 3 \text{ кг/м}$ ; 3-  $\rho_w = 5 \text{ кг/м}$

в)



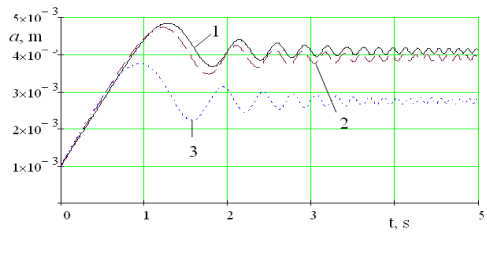
при швидкості: 1-  $\vartheta = 0$ ; 2-  $\vartheta = 3 \text{ м/с}$ ; 3-  $\vartheta = 5 \text{ м/с}$ ;  $l = 0,5 \text{ м}$

г)



при швидкості: 1-  $\vartheta = 0$ ; 2-  $\vartheta = 3 \text{ м/с}$ ; 3-  $\vartheta = 4 \text{ м/с}$ ;  $l = 0,75 \text{ м}$

д)



при швидкості: 1-  $\vartheta = 0$ ; 2-  $\vartheta = 3 \text{ м/с}$ ; 3-  $\vartheta = 4 \text{ м/с}$ ;  $l = 1 \text{ м}$

е)

Рис. 2. Значення амплітуди коливань системи середовище – пружний гвинт при переході через резонанс за різних значень погонної маси середовища – а), б), в); різних швидкостей руху його – г), д), е)

- одночасно резонансна амплітуда є меншою;
- вплив амплітуди входження у резонанс (початкового значення амплітуди) на резонансне значення амплітуди не значний;
- швидкість проходження резонансної зони впливає на резонансне значення амплітуди.

1. Андронов И. В. Неквазилинейная асимптотика задач о колебаниях балок и пластин на нелинейном упругом основании / Андронов И. В., Буланова Н. С. // Доп. НАН України. – К., 1995. – № 9. – С. 28–30. 2. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Николай Николаевич, Митропольский Юрий Алексеевич. – М. : Наука, 1974. – 501 с.

3. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем / Блэкьер О. – М. : Наука, 1969. – 275 с. 4. Доценко П. Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода / Доценко П. Д. // Прикладная механика. – 1971. – Вып. 3. – С. 85–91. 5. Кузьо І. В. Вплив поздовжнього руху на поперечні коливання нелінійних пружних систем / Кузьо І. В., Сокіл Б. І. // Вибрації в техніці і технологіях. – 2000. – № 2 (14). – С. 44–46. 6. Митропольский Ю. А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна-Гордона / Митропольский Ю. А. // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 9. – С. 1209–1216. 7. Chen L. Q. Nonlinear parametric vibration of axially moving beams: asymptotic analysis and differential quadrature verification / Li-Qun Chen, Bo Wang, Hu Ding // Journal of Physics: Conference Series 181 (2009). – P. 1–8. 8. Харченко Є. Багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних рухомих середовищ та методика побудови асимптотичних наближень крайових задач, що їх описують / Є. Харченко, М. Сокіл // Машинознавство. Всеукраїнський щомісячний науково-технічний і виробничий журнал. – 2007. – № 1. – С. 19–25. 9. В. Wan der Pol. A Theory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations // Radio Review. – 1920. – № 1. 10. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Митропольский Ю. А. – К. : Наукова думка, 1971. – 440 с.

Рецензент: д.т.н., професор Налобіна О. О. (НУВГП)

---

**Liashuk O. L., Candidate of Engineering, Klendii V. M., Candidate of Engineering** (Ternopil Ivan Puluj National Technical University), **Kondratiuk D. H., Candidate of Engineering, Associate Professor, Dmytrenko V. P., Assistant** (Vinnytsia National Agrarian University), **Kondratiuk O. M., Candidate of Engineering, Associate Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

### **RESONANCE OSCILLATION OF THE SYSTEM “CONTINUOUS ENVIRONMENT – ELASTIC SCREW”**

**The paper analyses the dependence of the amplitude of the system “environment – elastic screw” when passing through the resonance at different values of mass per unit length of the medium at different travelling speeds, physical and mathematical properties of the material and the conditions for resonance oscillations existence under its periodic excitation on the system. The dependence of the resonance oscillations of the system of free-flowing medium “the elastic screw” is described, by the relations  $a(t)$  and  $\vartheta(t)$ .**

**Keywords:** elastic screw, oscillations, amplitude, speed.



**Ляшук О. Л., к.т.н., Клендий В. Н., к.т.н.** (Тернопольский национальный технический университет им. Ивана Пулюя, г. Тернополь), **Кондратюк Д. Г., к.т.н., доцент, Дмитренко В. П., ассистент** (Винницкий национальный аграрный университет, г. Винница), **Кондратюк А. М., к.т.н., доцент** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

## **РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ СПЛОШНАЯ СРЕДА – УПРУГИЙ ШНЕКОВЫЙ ВИНТ**

**Исследовано зависимость амплитуды колебаний системы среда – упругий винт при переходе через резонанс при разных значениях погонной массы среды и разных скоростях движения, физико-механических свойств материала и условий существования резонансных колебаний при периодического воздействия на систему. Выведено зависимость резонансных колебаний системы сыпучая среда – упругий винт, которые описываются соотношениями  $a(t)$  и  $\vartheta(t)$ .**

***Ключевые слова:* упругий винт, колебания, амплитуда, скорость.**

---