УДК 539.3

Андрушков В. І., к.т.н., доцент, Гуртовий О. Г., к.т.н., доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ПРО МОЖЛИВІСТЬ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ В ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТАХ З УРАХУВАННЯМ НЕОДНОРІДНОСТІ ЇЇ МАТЕРІАЛУ ПО СЕРЕДИННІЙ ПОВЕРХНІ

Проведено аналіз можливості застосування системи диференціальних рівнянь моментної теорії непологих оболонок в переміщеннях, побудованої на основі гіпотези «прямих вертикалей», на випадок, коли матеріал оболонки неоднорідний по її серединній поверхні.
***Ключові слова*: оболонка, диференціальні рівняння, прямокутні координати, змінні коефіцієнти, неоднорідний матеріал.**

В більшості існуючих теорій розрахунку оболонок на міцність вихідні диференціальні рівняння, тобто рівняння рівноваги, фізичні та геометричні рівняння, складено в криволінійних координатах. Для довільних форм оболонок запис вихідних рівнянь в такій системі координат викличе певні труднощі.

В роботі [1] А. Пухер отримав диференціальні рівняння рівноваги безмоментних оболонок довільної форми в декартових координатах. Але ним було розглянуто лише статичний бік задачі без урахування дії згинних та крутних моментів.

О.Р. Ржаніцин [2] доповнив рівняння рівноваги А. Пухера геометричними рівняннями та фізичними залежностями закону Гука з введенням згинних та крутних моментів, що дозволило отримати нові рівняння моментної теорії непологих оболонок в прямокутних координатах у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_x^*}{\partial x} + \dfrac{\partial S_{xy}^*}{\partial y} + X^* = 0; \quad \dfrac{\partial N_y^*}{\partial y} + \dfrac{\partial S_{yx}^*}{\partial x} + Y^* = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} N_x^*\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y} N_y^*\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y} S_{xy}^*\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} S_{yx}^*\right) + \\ + \dfrac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} + Z^* = 0. \end{cases} \tag{1}$$

При виведенні цих рівнянь була прийнята не гіпотеза прямих нормалей, а еквівалентна їй за точністю гіпотеза прямих вертикалей. Згідно з нею вертикальні відрізки, що перетинають товщу оболонки, після деформації останньої залишаються прямими і мають той самий кут нахилу до серединної поверхні, що і до деформації. Це означає відсутність зсувів по товщині оболонки та лінійний розподіл напруг по висоті не вздовж нормалей до серединної поверхні оболонки, а вздовж вертикальних ліній по відношенню до неї. У відповідності з прийнятою гіпотезою згинні та крутні моменти задаються вже не на нормальних, а на вертикальних зрізах оболонки (рисунок). Всі величини поздовжніх та поперечних сил і моментів, які відмічено зірочкою, віднесені до одиниці довжини проекції вертикальних зрізів оболонки на горизонтальну площину.

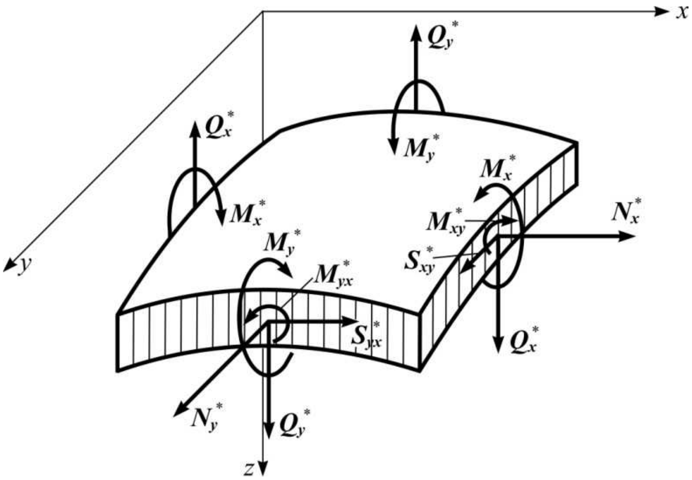

Рисунок. Внутрішні сили в перерізах оболонки паралельних до осі *z*

Система трьох диференціальних рівнянь рівноваги моментної теорії непологих оболонок довільної форми в прямокутних координатах відносно трьох функцій переміщень на підставі гіпотези «прямих вертикалей» представлена в роботі [3].

Виведення цієї системи полягало в підстановці в рівняння рівноваги оболонки (1) похідних від внутрішніх сил (2) і (3) з попередньою заміною в них осьових деформацій ε_x^*, ε_y^*, γ_{xy}^* і деформацій згину і кручення χ_x^*, χ_y^*, χ_{xy}^* через переміщення *u*, *v*, *w*.

$$\begin{cases} N_x^* = E \cdot h\left(\beta_{11} \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{12} \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{13} \cdot \gamma_{xy}^*\right); \\ N_y^* = E \cdot h\left(\beta_{12} \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{22} \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{23} \cdot \gamma_{xy}^*\right); \\ S_{xy}^* = E \cdot h\left(\beta_{13} \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{23} \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{33} \cdot \gamma_{xy}^*\right), \end{cases} \tag{2}$$

де $h = \dfrac{\overline{\delta}}{\cos\varphi_x \cdot \cos\varphi_y}$ – товщина оболонки в напрямку вертикальної осі *z*; $\cos\varphi_x$, $\cos\varphi_y$ – косинуси кутів нахилу дотичних до поверхні оболонки вздовж координатних осей *x* і *y*;

$$\begin{cases} M_x^* = D^*(\beta_{11}\cdot\chi_{\tilde{o}}^* + \beta_{12}\cdot\chi_y^* + \beta_{13}\cdot\chi_{\tilde{o}y}^*); \\ M_y^* = D^*(\beta_{12}\cdot\chi_{\tilde{o}}^* + \beta_{22}\cdot\chi_y^* + \beta_{23}\cdot\chi_{\tilde{o}y}^*); \\ M_{xy}^* = D^*(\beta_{13}\cdot\chi_{\tilde{o}}^* + \beta_{23}\cdot\chi_y^* + \beta_{33}\cdot\chi_{\tilde{o}y}^*), \end{cases} \tag{3}$$

де $D^* = \dfrac{E\cdot\overline{\delta}^3}{12\cos^2\varphi_x\cdot\cos^2\varphi_y}$.

Вирази (2) і (3) отримані автором роботи [2] і представляють собою фізичні рівняння моментної теорії непологих оболонок в прямокутних координатах зі змінними коефіцієнтами $\beta_{i\,j}(i, j = 1,2,3)$.

В усьому вищесказаному вважалось, що матеріал оболонки як по товщині, так і по всій площі її серединної поверхні є однаковим. Але отримані в роботі [3] рівняння рівноваги оболонки в прямокутних координатах не важко трансформувати в такі, що дозволять виконувати розрахунок оболонок довільної форми з урахуванням неоднорідності матеріалу по її серединній поверхні.

Фізичні рівняння (2) і (3) містять коефіцієнти $\beta_{i\,j}(i, j = 1,2,3)$, величина яких залежить від координат точок і геометрії серединної поверхні оболонки.

Якщо матеріал оболонки неоднорідний, тобто модуль пружності матеріалу являється функцією координат проекції її серединної поверхні на площину *xoy*, то його необхідно ввести в значення змінних коефіцієнтів в (2) і (3). Тоді в любій точці поверхні оболонки з координатами *x* і *y*

$$\beta_{i\,j}^{/}(x, y) = \beta_{i\,j}(x, y)\cdot E(x, y), \tag{4}$$

де $E(x, y)$ – функція зміни по поверхні оболонки модуля пружності матеріалу.

Нові фізичні рівняння (5) і (6) будуть відрізнятись від попередніх тільки тим, що мають на увазі під величинами їх коефіцієнтів:

$$\begin{cases} N_x^* = h(\beta_{11}^/ \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{12}^/ \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{13}^/ \cdot \gamma_{xy}^*)\,; \\ N_y^* = h(\beta_{12}^/ \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{22}^/ \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{23}^/ \cdot \gamma_{xy}^*)\,; \\ S_{xy}^* = h(\beta_{13}^/ \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{23}^/ \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{33}^/ \cdot \gamma_{xy}^*)\,, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} M_x^* = D_н^*(\beta_{11}^/ \cdot \chi_x^* + \beta_{12}^/ \cdot \chi_y^* + \beta_{13}^/ \cdot \chi_{xy}^*)\,; \\ M_y^* = D_н^*(\beta_{12}^/ \cdot \chi_x^* + \beta_{22}^/ \cdot \chi_y^* + \beta_{23}^/ \cdot \chi_{xy}^*)\,; \\ M_{xy}^* = D_н^*(\beta_{13}^/ \cdot \chi_x^* + \beta_{23}^/ \cdot \chi_y^* + \beta_{33}^/ \cdot \chi_{xy}^*)\,, \end{cases} \tag{6}$$

де $D_н^* = \dfrac{\overline{\delta}^3}{12\cos^2\varphi_x \cdot \cos^2\varphi_y}$.

Це означає, що весь хід математичних викладок, пов'язаних з отриманням системи диференціальних рівнянь рівноваги оболонки в переміщеннях, збережеться, а в самій системі рівнянь (7) відбудеться зміна лише правої частини кожного рівняння, тобто вільні члени не будуть містити величини модуля пружності матеріалу оболонки:

$$\begin{cases} A_1 \cdot u,_1 + A_2 \cdot u,_2 + A_3 \cdot u,_{11} + A_4 \cdot u,_{22} + A_5 \cdot u,_{12} + A_6 \cdot \upsilon,_1 + A_7 \cdot \upsilon,_2 + \\ + A_8 \cdot \upsilon,_{11} + A_9 \cdot \upsilon,_{22} + A_{10} \cdot \upsilon,_{12} + A_{11} \cdot \omega,_1 + A_{12} \cdot \omega,_2 + A_{13} \cdot \omega,_{11} + \\ + A_{14} \cdot \omega,_{22} + A_{15} \cdot \omega,_{12} = -\mathrm{X}^*/\overline{\delta}\;; \\ B_1 \cdot u,_1 + B_2 \cdot u,_2 + B_3 \cdot u,_{11} + B_4 \cdot u,_{22} + B_5 \cdot u,_{12} + B_6 \cdot \upsilon,_1 + B_7 \cdot \upsilon,_2 + \\ + B_8 \cdot \upsilon,_{11} + B_9 \cdot \upsilon,_{22} + B_{10} \cdot \upsilon,_{12} + B_{11} \cdot \omega,_1 + B_{12} \cdot \omega,_2 + B_{13} \cdot \omega,_{11} + \\ + B_{14} \cdot \omega,_{22} + B_{15} \cdot \omega,_{12} = -\mathrm{Y}^*/\overline{\delta}\;; \\ C_1 \cdot u,_1 + C_2 \cdot u,_2 + C_3 \cdot u,_{11} + C_4 \cdot u,_{22} + C_5 \cdot u,_{12} + C_6 \cdot \upsilon,_1 + C_7 \cdot \upsilon,_2 + \\ + C_8 \cdot \upsilon,_{11} + C_9 \cdot \upsilon,_{22} + C_{10} \cdot \upsilon,_{12} + C_{11} \cdot \omega,_1 + C_{12} \cdot \omega,_2 + C_{13} \cdot \omega,_{11} + \\ + C_{14} \cdot \omega,_{22} + C_{15} \cdot \omega,_{12} + C_{16} \cdot \omega,_{111} + C_{17} \cdot \omega,_{222} + C_{18} \cdot \omega,_{122} + \\ + C_{19} \cdot \omega,_{112} + C_{20} \cdot \omega,_{1111} + C_{21} \cdot \omega,_{2222} + C_{22} \cdot \omega,_{1122} + C_{23} \cdot \omega,_{1112} + \\ + C_{24} \cdot \omega,_{1222} = -\mathrm{Z}^*/\overline{\delta}\;. \end{cases} \tag{7}$$

де $A_i\,(i = 1 \div 15)$, $B_j\,(j = 1 \div 15)$, $C_k\,(1 \div 24)$ – коефіцієнти, які представляють різні комбінації коефіцієнтів $\beta^/{}_{nm}\,(n, m = 1,2,3)$. Значення деяких з них наведено в таблиці 1.

Змінна величина *P*, яка входить до складу деяких коефіцієнтів третього рівняння, визначатиметься за формулою

$$P = \frac{\overline{\delta}^2}{12\cos^2\varphi_x \cdot \cos^2\varphi_y}. \qquad (8)$$

Отримана система диференціальних рівнянь рівноваги оболонки в переміщеннях (7) дозволяє розширити запропоновану в роботі [3] методику на клас задач, коли потрібно врахувати неоднорідність матеріалу оболонки по її серединній поверхні.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів A_i, B_j, C_k

Коефіцієнт	Значення коефіцієнта
A_1	$\frac{\partial \beta'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \beta'_{13}}{\partial y}$
A_2	$\frac{\partial \beta'_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \beta'_{33}}{\partial y}$
A_{13}	$\beta'_{11} \cdot tg\varphi_x + \beta'_{33} \cdot tg\varphi_y$
A_{15}	$A_5 \cdot tg\varphi_x + A_{10} \cdot tg\varphi_y$
B_1	$\frac{\partial \beta'_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \beta'_{12}}{\partial y}$
B_9	β'_{22}
B_{14}	$\beta'_{22} \cdot tg\varphi_y + \beta'_{23} \cdot tg\varphi_x$
B_{15}	$A_{10} \cdot tg\varphi_x + 2\beta'_{23} \cdot tg\varphi_y$
C_{15}	$A_5 \cdot \left(tg^2\varphi_x - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + 2\beta_{23} \cdot \left(tg^2\varphi_y - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) +$ $+ 2A_{10} \cdot tg\varphi_x \cdot tg\varphi_y - 4A_2 \frac{\partial P}{\partial x} - 4B_2 \frac{\partial P}{\partial y} -$ $- 4\beta_{33} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - 2P\left(\frac{\partial^2 \beta'_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta'_{23}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \beta'_{33}}{\partial x \partial y}\right)$
C_{18}	$-2\left(A_{10} + \beta'_{33}\right)\frac{\partial P}{\partial x} - 6A_9 \frac{\partial P}{\partial y} - 2P\left(A_7 + 2B_2\right)$
C_{22}	$-2P\left(A_{10} + B_{33}\right)$
C_{24}	$-4\beta'_{23} \cdot P$

1. Pucher A., Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen. Beton und Eisen, Bd 33 (1934). – S. 298. **2.** Ржаницын А. Р. Расчет упругих оболочек

произвольного очертания в прямоугольных координатах / Ржаницын А. Р. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 1. – С. 21–28.
3. Андрушков В. И. К расчету в перемещениях оболочек произвольной формы / Андрушков В. И., Рассказов А. О. // Прикладная механика. – 1981. – 17, № 11. – С. 118–121.

Рецензент: д.т.н., проф. Пугачов Є. В. (НУВГП)

Andrushkov V. I., Candidate of Engineering, Associate Professor, Hurtovyi A. H., Candidate of Engineering, Associate Professor
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

CALCULATION OF THE POSSIBILITY OF SHELLS ARBITRARY SHAPE IN A RECTANGULAR COORDINATE WITH REGARD OF ITS MATERIAL HETEROGENEITY ON THE MIDDLE SURFACE

The analysis of the possibility of using a system of differential equations of bending theory of shells in nonshallow movements, built on the basis of the hypothesis of "direct verticals", the case where a non-uniform coating material on its middle surface.
***Keywords*: shell, differential equations, rectangular coordinates, variables, coefficients, heterogeneous material.**

Андрушков В. И., к.т.н., доцент, Гуртовый А. Г., к.т.н., доцент
(Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСЧЕТА ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ЕЕ МАТЕРИАЛА ПО СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Проведен анализ возможности использования системы дифференциальных уравнений моментной теории непологих оболочек в перемещениях, построенной на основе гипотезы «прямых вертикалей», на случай, когда материал оболочки неоднородный по ее срединной поверхности.
***Ключевые слова*: оболочка, дифференциальные уравнения, прямоугольные координаты, переменные коэффициенты, неоднородный материал.**
