

УДК 539.3

Сяський А. О., д.т.н., професор, Шевцова Н. В., к.т.н., доцент (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне),
Дейнека О. Ю., ст. викладач (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

МІЖФАЗНА ТРІЩИНА В НЕСКІНЧЕННІЙ ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Побудовано наближений розв'язок задачі про підсилення контуру кругового отвору в нескінченній ізотропній пластинці, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності, пружним кільцем сталого прямокутного поперечного перерізу за наявності міжфазного розрізу, береги якого не контактують. Кільце моделюється замкненим криволінійним брусом, лінія контакту якого з контуром отвору пластинки не співпадає з його геометричною віссю. З урахуванням гіпотези плоских перерізів і відсутності тиску між поздовжніми волокнами бруса, побудовано систему інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гілберта для визначення контактних зусиль між пластинкою і кільцем та внутрішніх силових факторів у кільці. Методом механічних квадратур та колокації досліджується вплив жорсткості кільця на розподіл напружень.

Ключові слова: ребро жорсткості, міжфазна тріщина, ізотропна пластинка, круговий стрижень, внутрішні зусилля, нормальні напруження.

Вступ. Тонкі пружні пластинки, послаблені отворами, знаходять широке застосування в різних галузях машинобудування і будівництва. Для зменшення концентрації напружень контури отворів підсилюють пружними ребрами сталої чи змінної жорсткості. Ці ребра, складаючи незначну частину загальної ваги конструкції, суттєво впливають на її міцність і жорсткість [1; 2].

В процесі виготовлення чи експлуатації таких конструкцій на межі сполучення різнорідних компонентів виникають тріщини (розрізи нульової ширини). Вказані дефекти під дією силових або температурних навантажень можуть спричинити високу концентрацію напружень і наступне міжфазне руйнування.

Найбільш повно такі задачі досліджені для кусково-однорідних пластин з прямолінійною чи криволінійною межею поділу матеріалів [3–5], де розглядаються випадки відсутності контакту берегів розрізу

або його наявності в центральній частині чи привершинних ділянках розрізу.

Що стосується впливу міжфазних тріщин (розрізів) на напружено-деформований стан пластинки з криволінійним отвором, контури яких підсилені замкненими пружними ребрами, то такі задачі практично не розглядалися.

Пропонується розв'язок задачі про підсилення контуру кругового отвору в нескінченній ізотропній пластинці пружним кільцем за наявності на ділянці їх сполучення міжфазного розрізу, береги якого в процесі деформації не контактують.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з круговим отвором радіусом $\rho = 1$, обмеженим гладкою циліндричною поверхнею. Серединна площина пластинки віднесена до декартової (x, y) та полярної (ρ, λ) систем відліку з полюсом у центрі отвору. Лінію її перетину з поверхнею отвору будемо називати контуром отвору і позначимо через Γ .

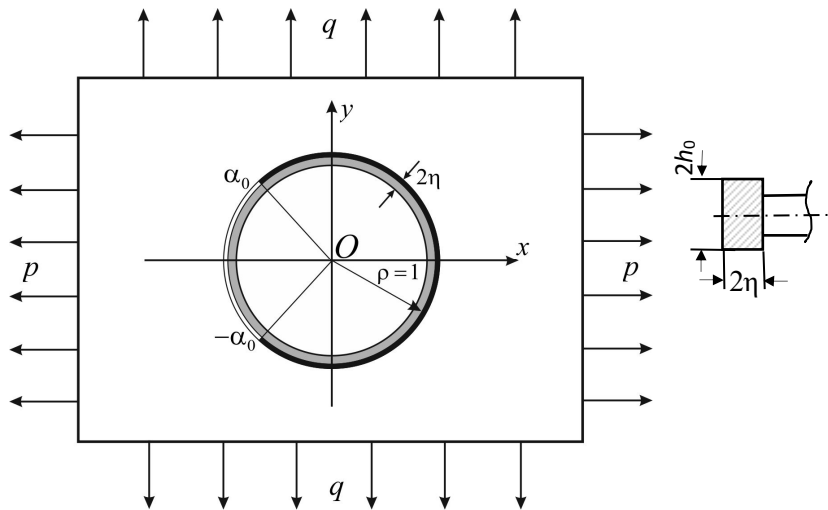


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Припустимо, що в отвір пластинки без натягу і зазору вставлено пружне кільце сталого прямокутного поперечного перерізу $2h_0 \times 2\eta$ ($2h_0$ – висота кільця, 2η – його ширина), яке симетричне відносно серединної площини пластинки (рис. 1). На ділянці $\Gamma_1 = [-\alpha_0, \alpha_0]$ контуру Γ кільце спаяне з пластинкою, на решті контуру (ділянці Γ_2) контакт між кільцем і пластинкою відсутній.

Пружна система пластинка-кільце перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподі-

леними зусиллями p і q , які діють на нескінченності в напрямках координатних осей.

Мета роботи. Визначення напруженого стану на контурі Γ пластинки та в пружному кільці.

Основні рівняння задачі. Умовно відділивши кільце від пластинки, замінивши дію одного тіла на інше нормальними T_ρ і дотичними $S_{\rho\lambda}$ контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі для пластинки з криволінійним отвором та пружного кільця.

Пластинка перебуває в пружній рівновазі під дією контактних зусиль на контурі Γ і навантаження на нескінченності. Компоненти напружено-деформованого стану пластинки в точках контуру Γ , при заданому її навантаженні визначаються зі співвідношень [6]

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + (p+q) - 2(p-q) \cos 2\lambda \right]; \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + 2(p-q) \sin 2\lambda \right],$$

$$\lambda \in [-\pi; \pi],$$

де ε_λ, V – відносне видовження в точках контуру Γ і кут повороту

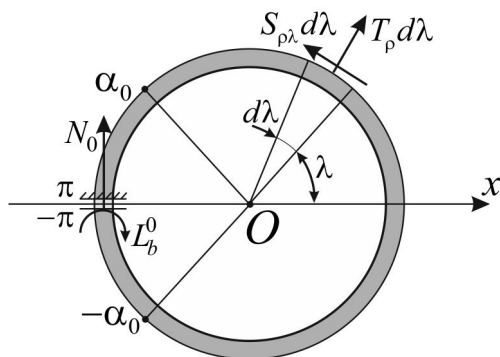


Рис. 2. Розрахункова схема кільця

нормалі до нього; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Пружне кільце моделюємо замкненим криволінійним стрижнем, серединна поверхня якого не співпадає з поверхнею його сполучення з пластинкою. Деформації кільця контактними зусиллями описуються основними рівняннями одновимірної теорії криволіній-

них стрижнів великої кривини [7], яка враховує гіпотезу плоских перерізів і відсутність бокового тиску між поздовжніми волокнами.

Якщо через N , Q , L_b позначити внутрішні поздовжню та поперечну сили і згинальний момент, які виникають у поперечних перерізах стрижня і віднесені до його осі, то інтегральні умови рівноваги частини $[-\pi; \lambda]$ кільця (рис. 2) набувають вигляду

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= -N_0 \cos \lambda + f_1 \cos \lambda + f_2 \sin \lambda; \\ Q(\lambda) &= -N_0 \sin \lambda + f_1 \sin \lambda - f_2 \cos \lambda; \\ L_b &= L_b^0 + (1 - \eta)(1 + \cos \lambda)N_0 - (1 - \eta)(f_1 \cos \lambda + f_2 \sin \lambda) - \psi(\lambda), \\ &\lambda \in [-\pi; \pi], \end{aligned} \quad (2)$$

де $f_1 + if_2 = i \int_{-\pi}^{\lambda} (T_{\rho} + iS_{\rho\lambda}) e^{it} dt$; $\psi(\lambda) = \int_{-\alpha_0}^{\lambda} S_{\rho\lambda}(t) dt$; N_0 , L_b^0 – початкові параметри в умовному розрізі $\lambda = -\pi$.

Компоненти деформації крайнього поздовжнього волокна кільця, яке контактує з пластинкою, визначаються за формулами [7]

$$\varepsilon_{\lambda}^{(c)} = \frac{N}{g_4} + \left(1 - \frac{r_0}{\rho}\right) \frac{RL_b}{g_2}; \quad \theta_b = \int_{-\pi}^{\lambda} \left(\frac{N}{g_4} + \frac{RL_b}{g_2}\right) d\lambda - \frac{2(1 + \nu_0)\mu}{g_4} Q. \quad (3)$$

Тут $\varepsilon_{\lambda}^{(c)}$, θ_b – відносне видовження волокна і кут повороту нормалі до нього; E_0 , ν_0 – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу стрижня; $g_4 = E_0 F_0$ – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); $g_2 = E_0 J_0$ – жорсткість на згин; $F_0 = 4h_0 \eta$ – площа перерізу стрижня; $J_0 = 4h \eta^3 / 3$ – момент інерції площі перерізу стрижня відносно головної осі; $R = 1 - \eta$ – радіус кривини осьового волокна стрижня; r_0 – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна стрижня; μ – стала (для прямокутного перерізу $\mu = 1.2$).

На підставі методу сил [7], сталі N_0 і L_b^0 визначаються із умов однозначності кута повороту та вертикального зміщення

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{RL_b}{\omega_0} + N\right) d\lambda = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{R^2}{\omega_0} - 1\right) L_b \cos \lambda - 2\mu(1 + \nu) R Q \sin \lambda\right] d\lambda = 0, \quad (4)$$

де $\omega_0 = J_0 / F_0$.

Граничні умови контактування пластинки і кільця формулюємо у вигляді рівності відносних видовжень спільних волокон і кутів повороту нормалі на ділянці контакту Γ_1 . При відсутності контакту на ділянці Γ_2 вони набувають вигляду

$$\varepsilon_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda}^{(c)}; \quad V = \theta_b, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad T_{\rho} = S_{\rho\lambda} = 0, \quad \lambda \in [\alpha_0; 2\pi - \alpha_0]. \quad (5)$$

Підставивши співвідношення (1), (3) в (5) з урахуванням (2), одержимо:

$$\begin{aligned}
 & (1-\nu)T_{\rho}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_{\rho}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + (p+q) - 2(p-q) \cos 2\lambda = \\
 & = \frac{2Eh}{E_0 F_0} \left(-N_0 \cos \lambda + f_1 \cos \lambda + f_2 \sin \lambda + \right. \\
 & \left. + \frac{1-r_0}{\omega_0} \cdot (R(L_b^0 + (1-\eta)(1+\cos \lambda)N_0 - (1-\eta)(f_1 \cos \lambda + f_2 \sin \lambda) - \psi(\lambda))) \right); \\
 & (1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_{\rho}(t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + 2(p-q) \sin 2\lambda = \tag{6} \\
 & = \frac{2Eh}{E_0 F_0} \left[\int_{-\pi}^{\lambda} \left(-N_0 \cos \lambda + f_1 \cos \lambda + f_2 \sin \lambda + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R(L_b^0 + (1-\eta)(1+\cos \lambda)N_0 - (1-\eta)(f_1 \cos \lambda + f_2 \sin \lambda) - \psi(\lambda))}{\omega_0} \right) d\lambda - \right. \\
 & \left. - \frac{2(1+\nu_0)\mu}{g_4} (-N_0 \sin \lambda + f_1 \sin \lambda - f_2 \cos \lambda) \right];
 \end{aligned}$$

$$\psi'(\lambda) = S_{\rho\lambda}(\lambda); T_{\rho} = -f_1' \sin \lambda + f_2' \cos \lambda; S_{\rho\lambda} = -f_1' \cos \lambda - f_2' \sin \lambda, \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0].$$

Систему (6) доповнюємо умовами (4), перетвореними до вигляду

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{(1-\eta)^2}{\omega_0} - 1 \right) \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (f_1(\lambda) \cos \lambda + f_2(\lambda) \sin \lambda) d\lambda + \frac{1-\eta}{\omega_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \psi(\lambda) d\lambda = \\
 & = \frac{1-\eta}{\omega_0} [L_b^0 + (1-\eta)N_0]; \\
 & \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1(\lambda) \cos^2 \lambda d\lambda + \frac{2\mu\omega_0(1+\nu)}{(1-\eta)^2 - \omega_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1(\lambda) \sin^2 \lambda d\lambda + \tag{7} \\
 & + \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2(\lambda) \sin \lambda \cos \lambda d\lambda - \frac{2\mu\omega_0(1+\nu)}{(1-\eta)^2 - \omega_0} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2(\lambda) \sin \lambda \cos \lambda d\lambda + \\
 & + \frac{1}{1-\eta} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \psi(\lambda) \cos \lambda d\lambda = \left(1 + \frac{2\mu\omega_0(1+\nu)}{(1-\eta)^2 - \omega_0} \right) \pi N_0.
 \end{aligned}$$

Співвідношення (6), (7) визначають математичну модель поставленої задачі і слугують для визначення контактних зусиль T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$

на контурі Γ в пластинці та функції f_1, f_2, ψ .

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (6), (7) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру функцій $T_\rho, S_{\rho\lambda}, f_1, f_2, \psi$ на кінцях ділянки сполучення пластинки і кільця.

Контактні зусилля, що діють на кільце з боку пластинки визначають зрівноважену плоску систему сил, тому на підставі позначень із (2), (6) для функцій f_1, f_2, ψ можна зробити висновок, що

$$f_1(\pm\alpha_0) = f_2(\pm\alpha_0) = \psi(\pm\alpha_0) = 0. \quad (8)$$

Структуру контактних зусиль визначає характеристична частина перших двох інтегральних рівнянь системи (6), яка співпадає з відповідною характеристичною частиною системи інтегральних рівнянь, що описує напружено-деформований стан кусково-однорідної пластинки з розрізом по дузі кола [8]. Це означає, що контактні зусилля на кінцях ділянки сполучення пластинки і кільця мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція.

Нехтуючи впливом осциляції та враховуючи співвідношення (8) наближений розв'язок задачі можна побудувати методом механічних квадратур і колокації. Квадратурні формули цього методу наведені в роботах [6; 9].

Якщо шукані функції стануть відомі, то кільцеві зусилля T_λ на контурі Γ визначаються за формулою

$$T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda, \quad (9)$$

а нормальні напруження в крайніх поздовжніх волокнах кільця на підставі закону Гука в його одновимірній формі [10]

$$\begin{aligned} \sigma_*^{(1)} &= \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\rho - r_0}{\rho} \cdot \frac{RL_b}{\omega_0} \right] \quad \text{при } \rho = 1; \\ \sigma_*^{(2)} &= \frac{1}{F_0} \left[N + \frac{\rho - r_0}{\rho} \cdot \frac{RL_b}{\omega_0} \right] \quad \text{при } \rho = 1 - 2\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

Найбільші дотичні напруження в осьовому волокні ($\rho = 1 - \eta$) визначаються за формулою Журавського [10]

$$\tau_* = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F_0}. \quad (11)$$

Для пластинки і пружного кільця з параметрами $h_0/h = 4/3$; $\eta = 0.05$; $\alpha_0 = 2\pi/3$; $p = 1$; $q = 0$ запропонованим методом досліджено вплив відносної жорсткості кільця на величини

$T_\rho, S_{\rho\lambda}, T_\lambda, \sigma_*^{(1)}, \sigma_*^{(2)}, \tau_*$.

Результати числового розрахунку при використанні 199 вузлів колокації проілюстровано на рис. 3–5. Суцільні лінії відповідають випадку $E_0/E = 1$; штрихові – $E_0/E = 5$; штрихпунктирні – $E_0/E = 10$.

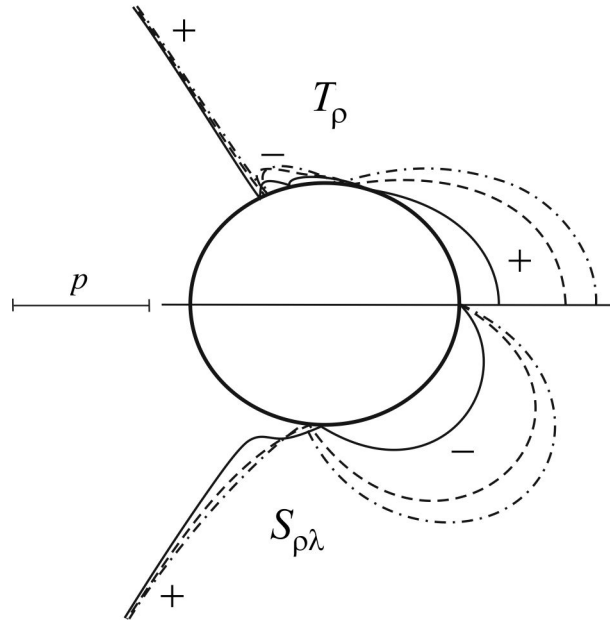


Рис. 3. Розподіл контактних зусиль $T_\rho, S_{\rho\lambda}$ на ділянці сполучення пластинки і кільця

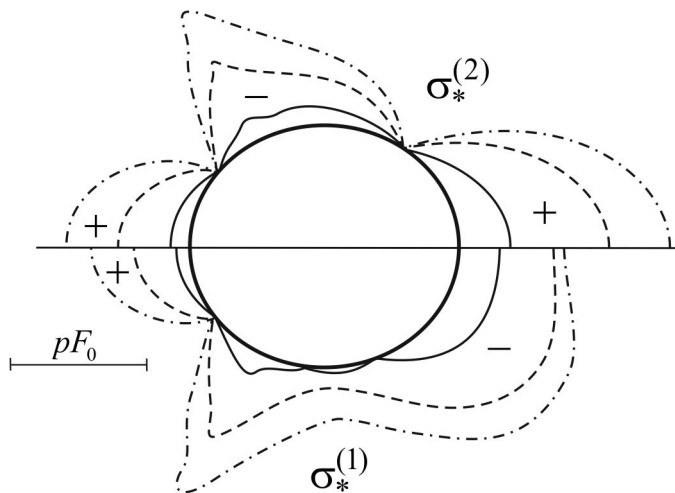


Рис. 4. Розподіл нормальних напружень σ_* в зовнішньому (нижня частина) і внутрішньому (верхня частина) поздовжніх волокнах кільця

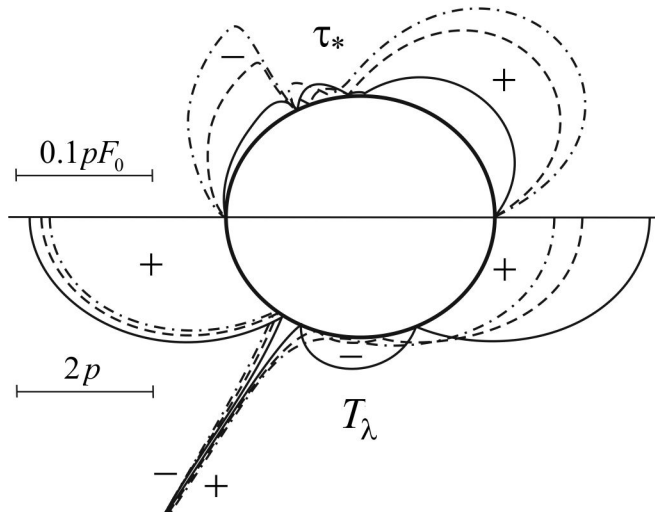


Рис. 5. Розподіл найбільших дотичних τ_* напружень в осьовому волокні кільця (верхня частина) та кільцевих зусиль T_λ на контурі Γ (нижня частина)

Аналізуючи одержані результати, приходимо до таких висновків:

- зі збільшенням відношення модулів Юнга E_0/E суттєво збільшуються контактні напруження на контурі отвору в пластинці, а також нормальні напруження в крайніх волокнах підсилення. В той же час кільцеві зусилля на ділянці підсилення різко зменшуються. На ділянці розрізу ці зусилля практично не залежать від жорсткості кільця;

- найбільші дотичні напруження в осьовому волокні на порядок менші від нормальних напружень в крайніх поздовжніх волокнах кільця;

- запропонований метод розв'язання задачі без істотних змін можна перенести на ортотропні пластинки з круговим отвором.

1. Савин Н. Г., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К. : Наук. думка, 1964. 384 с. **2.** Мартынович Т. Л., Юринець В. Е. Контактные взаимодействия пластинки с упругими элементами. Львов : Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1984. 160 с. **3.** Грилицький Д. В. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою з розрізами на лінії спаю. *Питання механіки і математики*. ЛДУ, 1962. Вип. 9. С. 79–86. **4.** Шинкарчук Н. В. Односторонній контакт ізотропної пластинки з коловим отвором і пружного диска. *Міжвузівський збірник «Наукові нотатки»*. Луцьк, 2014. Випуск № 44. С. 296–301. **5.** Шинкарчук Н. В. Контакт берегів розрізу між нескінченною ізотропною пластинкою з отвором і коловим диском.

тропною пластинкою і жорстким диском. *Вісник НУВГП* : збірник наукових праць. Технічні науки. Вип. 1 (65). Рівне : НУВГП, 2014. С. 170–175. **6.** Сяський А. А., Сяський В. А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением. *Прикладная механика*. 1983. Т. 19. № 5. С. 94–99. **7.** Сяський А., Шевцова Н. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів. *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2015. № 3 (79). С. 24–30. **8.** Грилицький Д. В., Луцишин Р. М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів : Вид-во «Вища школа» при ЛДУ, 1975. 116 с. **9.** Сяський А. О. Упругое подкрепление пластины с частично подкрепленными отверстиями. *Прик. математика и механика*. 1986. Т. 50. № 2. С. 247–254. **10.** Сяський А., Батишкіна Ю. Контактна взаємодія розімкнених стрижнів змінної жорсткості з еліптичним отвором нескінченної ортотропної пластинки. *Вісник Тернопільського національного університету*. 2004. Т. 9. № 3. С. 17–24.

Рецензент: д.т.н., професор Трач В. М. (НУВГП)

Siaskyi A. O., Doctor of Engineering, Professor, Shevtsova N. V., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor (Rivne State University of Humanities, Rivne); **Deineka O. Y., Senior Lecturer** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

INTERFACIAL FRACTURE IN ISOTROPIC PLATE WITH REINFORCED CIRCULAR OPENING

An approximate solution to the problem of amplifying the contour of a circular opening in an infinite isotropic plate is constructed by a resilient rib of a stable rectangular cross section in the presence of a phase-cross section shores of which are not contacted. The plate is in a homogeneous stressed state at infinity. By conditional separation of the rib from the plate, replacing the action of one body on the other by normal and tangent contact forces, the first main task for the plate with a curved opening and resilient rib is considered. The rib is modeled by a closed curved beam, the contact line of which with the contour of the opening of the plate does not coincide with its geometric axis. Deformations of the rib by contact forces are described by the basic equations of the one-dimensional theory of curvilinear rods of large curvature. The boundary conditions of the contact of the plate and the rib are formulated in the form of the equality of the relative elongations of the common filaments and the corners of a turning of the normal on the contact area. Taking into

account the hypothesis of flat cross sections and the absence of pressure between the longitudinal filaments of a beam, a system of integral differential equations with the Hilbert cores was constructed to determine the contact forces between the plate and rib and the internal forces factors in the rib. The structure of functions describing the contact forces determines the characteristic part of the received integral equations. An approximate solution to the problem is given using Lagrange's interpolation polynomials. By the method of mechanical quadratures and collocation, the effect of the relative rigidity of the rib on the distribution of tensions in the plate and rib is investigated.

Keywords: rib rigidity, interfacial fracture, isotropic plate, circular core, internal forces, normal tensions.

Сяський А. О., д.т.н., проф., Шевцова Н. В., к.т.н., доц., (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно);

Дейнека О. Ю., ст. преподаватель (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

МЕЖФАЗНАЯ ТРЕЩИНА В БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Построено приближенное решение задачи об усилении контура кругового отверстия в бесконечной изотропной пластинке, которая находится в условиях однородного напряженного состояния на бесконечности, упругим кольцом постоянного прямоугольного поперечного сечения, при наличии межфазного разреза, края которого не контактируют. Кольцо моделируется замкнутым криволинейным брусом, линия контакта которого с контуром отверстия пластинки не совпадает с его геометрической осью. С учетом гипотезы плоских сечений и отсутствия давления между продольными волокнами бруса, построена система интегрально-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта для определения контактных усилий между пластинкой и кольцом и внутренних силовых факторов в кольце. Методом механических квадратур и коллокации исследуется влияние жесткости кольца на распределение напряжений.

Ключевые слова: ребро жесткости, межфазная трещина, изотропная пластина, круговой стержень, внутренние усилия, нормальные напряжения.
