

УДК 539.3

Бабич С. М., к.т.н., Музичук К. П., к.т.н. (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

РОЗРАХУНОК МАТОЧИНИ ПРЯМОБІЧНОГО ШЛІЦЬОВОГО З'ЄДНАННЯ

Запропоновано методику уточненого розрахунку напружено-деформованого стану маточини прямобічного шліцьового з'єднання. Моделюючи її нескінченною ізотропною пластинкою з круговим отвором, контур якого на рівновіддалених ділянках підсилений пружними криволінійними брусами змінної жорсткості, а шліцьовий вал – абсолютно жорстким ребристим диском, побудовано систему двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта. Наближений розв'язок задачі реалізовано методом механічних квадратур і колокації.

Ключові слова: шліцьове з'єднання, нескінченна пластинка, підсилювальний стрижень, контактні зусилля, сингулярні інтегральні рівняння, метод механічних квадратур і колокації.

У машинобудуванні для передачі обертального руху широко використовуються шліцьові з'єднання. Вони утворюються сполученням вала та отвору маточини за допомогою паралельних до осі вала (отвору) шліців і пазів, рівномірно розміщених на їх циліндричних поверхнях. Серед таких з'єднань найпоширенішими є з'єднання з прямокутним профілем зубців.

Як показує досвід експлуатації та проведені теоретичні й експериментальні дослідження [1], в окремих випадках може відбуватися вихід з ладу шліцьових з'єднань через пошкодження робочих поверхонь зубців у вигляді спрацювання та зминання, заїдання, поломки вала чи маточини. Тому розрахунок таких з'єднань з урахуванням реальних умов їх роботи є досить важливою задачею для забезпечення їх зносостійкості та міцності.

Розв'язанню цієї проблеми в науковій літературі присвячено ряд праць. Зокрема, у [2; 3] проведено дослідження контактної взаємодії тонкостінних пружних елементів і масивних циліндричних тіл. Передачу сил через розімкнені пружні стрижні до контуру криволінійного отвору нескінченної пластинки вивчено в [4]. Окремі задачі трибомеханіки для шліцьових з'єднань були розв'язані в [5-7]. При цьому в [2; 5; 6] підсилювальні елементи моделювалися пружними

лініями, які ототожнювалися з фактичною лінією спаю, а в [7] була використана модель пружного криволінійного бруса [3]. У роботах [5; 7] розрахунки проводилися для бруса сталої жорсткості на розтяг (стиск), а в [6] – для змінної.

Пропонується уточнений розрахунок маточини шліцьового з'єднання із пазами прямокутного профілю.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з круговим отвором радіуса $\rho = 1$. Допустимо, що контур γ отвору пластинки на ділянках

$$\gamma_1 = \bigcup_{k=0}^{N-1} [-\beta + 2\pi k/N; \beta + 2\pi k/N], \quad k = 0..N-1$$

підсилено системою N однакових пружних стрижнів змінної жорсткості (рис. 1), які виготовлені з того ж матеріалу, що й пластинка. При цьому вони мають таку форму, що в результаті підкріплення між стрижнями утворюються пази прямокутного профілю. Вважаємо, що лінія фактичного спаю стрижнів з пластинкою не співпадає з їх геометричною віссю [3].

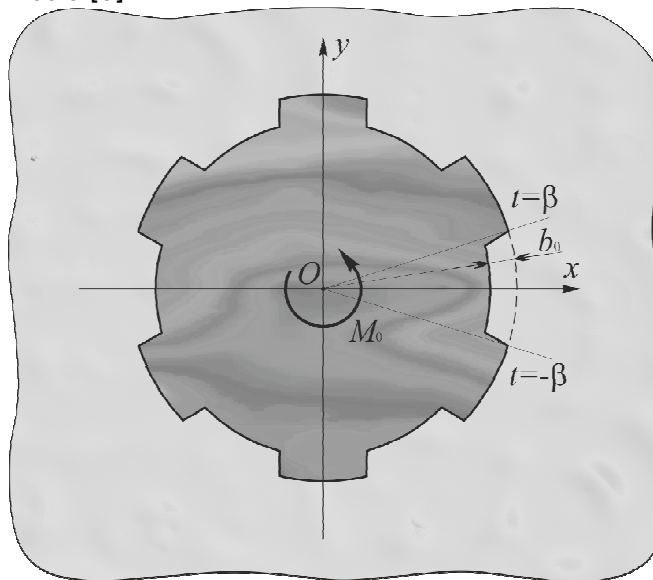


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

В отвір пластинки без зазору й натягу вставлено абсолютно жорсткий диск відповідної форми. У центрі диска прикладено пару сил з моментом M_0 , внаслідок чого пластинка й диск вступають у взаємодію, яка здійснюється по бічних гранях шліців. Зовнішні поверхні пластинки та диска не контактують.

Будемо вважати, що в зонах гладкого контакту диска й торця підсилювального стрижня пластинки перпендикулярно до торця стрижня діють рівномірно розподілені зусилля з інтенсивністю q , які зводяться до осьової сили P_0 . Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних зусиль на контурі отвору пластинки та в підсилювальних елементах.

Математична модель задачі. Середню поверхню пластинки віднесемо до полярної системи координат (ρ, λ) з полюсом в центрі її отвору. Полярна вісь проходить через середину одного із підсилювальних стрижнів.

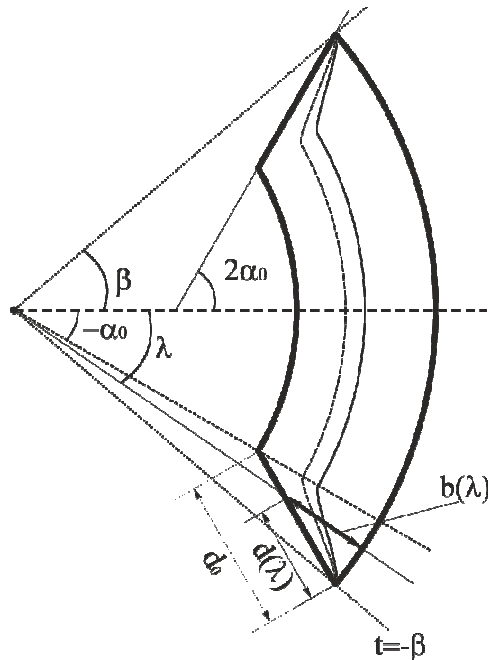


Рис. 2. Геометрична схема зубця

Позначимо через b_0 глибину паза пластинки. На підставі рис. 2 геометричні параметри зони контакту задаються співвідношеннями

$$b(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin(2\alpha_0 - \beta)}{\sin(2\alpha_0 - \lambda)}, & \lambda \in [\alpha_0, \beta]; \\ b_0, & \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0]; \\ 1 - \frac{\sin(2\alpha_0 - \beta)}{\sin(2\alpha_0 + \lambda)}, & \lambda \in [-\beta, -\alpha_0], \end{cases} \quad (1)$$

$$\beta = \frac{\pi}{N} - \arcsin[(1 - b_0) \sin \alpha_0];$$

$$d_0 = \frac{(1 - b_0) \sin(\beta - \alpha_0)}{\sin(2\alpha_0 - \beta)}.$$

Якщо умовно відділити підсилювальні ребра від пластинки, а їх дію замінити невідомими контактними зусиллями T_ρ і $S_{\rho\lambda}$, то прийдемо до першої граничної задачі плоскої теорії пружності для нескінченної пластинки з круговим отвором (рис. 3).

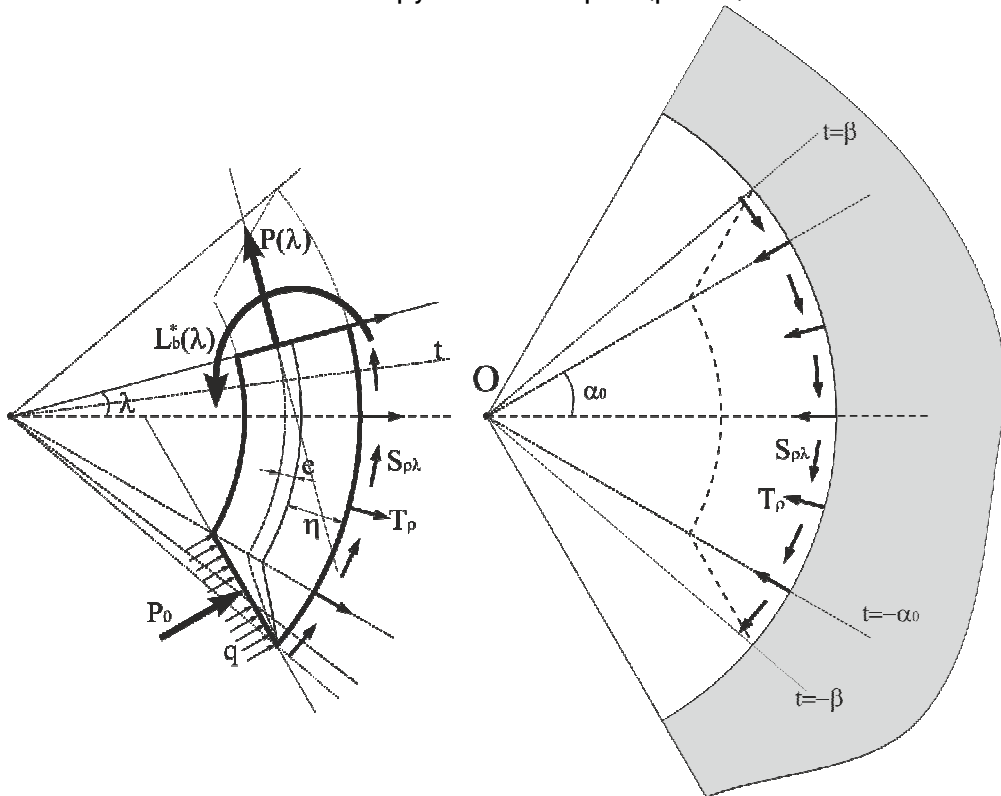


Рис. 3. Схема умовного розділення пластинки та підсилювального стрижня

Згідно з постановкою задачі напружено-деформований стан на контурі γ буде симетричний, тому

$$T_\rho(\lambda + \varphi_0) + iS_{\rho\lambda}(\lambda + \varphi_0) = T_\rho(\lambda) + iS_{\rho\lambda}(\lambda),$$

$$\varphi_0 = \frac{2k\pi}{N}; \quad \lambda \in [-\beta; \beta]; \quad k = 0..N-1.$$

Граничні умови поставленої задачі формулюються у вигляді рі-

вності деформацій пластинки та стрижня на ділянці сполучення [8]

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda) = \varepsilon_{\lambda}^c(\lambda); \quad V(\lambda) = V^c(\lambda), \quad \lambda \in [-\beta; \beta]. \quad (2)$$

Компоненти напружено-деформованого стану [8] на контурі отвору пластинки для даної задачі запишуться так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda}(\lambda) = \frac{1}{2Eh} & \left\{ (1-\nu)T_{\rho}(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} T_{\rho}(t) dt + \right. \\ & \left. + \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} N \frac{\lambda-t}{2} dt \right\}; \\ V(\lambda) = \frac{1}{2Eh} & \left\{ (1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} S_{\rho\lambda}(t) dt - \right. \\ & \left. - \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} T_{\rho}(t) \operatorname{ctg} N \frac{\lambda-t}{2} dt \right\}, \quad \lambda \in [-\beta; \beta]. \quad (3) \end{aligned}$$

Тут ν , E – коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга матеріалу пластинки відповідно.

Компоненти деформації волокна стрижня, яке спаяне з пластинкою, знаходимо зі співвідношень [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda}^c(\lambda) &= \frac{P(\lambda)}{g_4(\lambda)} + (\eta(\lambda) + e(\lambda)) \frac{L_b^*(\lambda)}{g_4(\lambda)e(\lambda)}; \\ V^c(\lambda) &= \int_{-\beta}^{\lambda} \frac{L_b^*(t)}{\omega_0(t)g_4(t)} dt + V^c(-\beta), \quad \lambda \in [-\beta; \beta], \quad (4) \end{aligned}$$

де $g_4(\lambda) = 2Ehb(\lambda)$ – жорсткість стрижня на розтяг (стиск);

$\eta(\lambda) = \frac{b(\lambda)}{2}$ – відстань між осьовим і спаяним з пластинкою волок-

нами; $e(\lambda) = \frac{b^2(\lambda)}{6(2-b(\lambda))}$ – відстань між осьовим та нейтральними для

чистого згину волокнами; $\omega_0(\lambda) = \frac{b^2(\lambda)}{12}$; $V^c(-\beta)$ – стала інтегрування.

Нехай інтенсивність зусиль q визначається за законом $q = \frac{P_0}{d_0}$.

Знайдемо внутрішні зусилля $P(\lambda)$ і моменти $L_b^*(\lambda)$, що виникають у

стрижні, із умов рівноваги його частини (рис. 3)

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \sin \lambda \int_{-\beta}^{\lambda} (T_{\rho}(t) \cos t - S_{\rho\lambda}(t) \sin t) dt - \cos \lambda \times \\
 &\times \int_{-\beta}^{\lambda} (T_{\rho}(t) \sin t + S_{\rho\lambda}(t) \cos t) dt - \cos(2\alpha + \lambda) \frac{P_0}{d_0} d(\lambda); \\
 L_b^*(\lambda) &= -(1 - \eta(\lambda) - e(\lambda))P(\lambda) - \int_{-\beta}^{\lambda} S_{\rho\lambda}(t) dt - \cos \mu(\lambda) \tilde{h}(\lambda) \frac{P_0}{d_0} d(\lambda). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned}
 d(\lambda) &= d_0 - (1 - b(\lambda)) \frac{\sin(-\lambda - \alpha_0)}{\sin \alpha_0}, \quad \lambda \in [-\beta, -\alpha_0]; \\
 \tilde{h}(\lambda) &= \sqrt{(1 - b(\lambda))^2 + \frac{d^2(\lambda)}{4} + (1 - b(\lambda))d(\lambda) \cos(2\alpha_0 + \lambda)}, \\
 &\quad \lambda \in [-\beta, -\alpha_0]; \\
 \tilde{h}(\lambda) &= \sqrt{(1 - b_0)^2 + \frac{d_0^2}{4} + (1 - b_0)d_0 \cos \alpha_0}, \quad \lambda \in [-\alpha_0, \beta]; \\
 \mu(\lambda) &= \begin{cases} 2\alpha + \lambda - \arcsin \frac{d(\lambda) \sin(2\alpha_0 + \lambda)}{2\tilde{h}(\lambda)}, & \lambda \in [-\beta, -\alpha_0]; \\ \alpha - \arcsin \frac{d_0 \sin \alpha_0}{2\tilde{h}(\lambda)}, & \lambda \in [-\alpha_0, \beta]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Підстановка (3), (4), (5) в граничні умови (2) призводить до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення величин T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$ на проміжку $[-\beta; \beta]$

$$\begin{aligned}
 (1 - \nu)T_{\rho}(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} T_{\rho}(t) dt + \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} N \frac{\lambda - t}{2} dt - \\
 - \frac{C(\lambda)}{b(\lambda)} \left\{ \sin \lambda \int_{-\beta}^{\lambda} (T_{\rho}(t) \cos t - S_{\rho\lambda}(t) \sin t) dt - \cos \lambda \times \right. \\
 \left. \times \int_{-\beta}^{\lambda} (T_{\rho}(t) \sin t + S_{\rho\lambda}(t) \cos t) dt \right\} + \frac{\eta(\lambda) + e(\lambda)}{e(\lambda)b(\lambda)} \int_{-\beta}^{\lambda} S_{\rho\lambda}(t) dt = \\
 = -\frac{C(\lambda)}{b(\lambda)} \cos(2\alpha + \lambda) \frac{P_0}{d_0} d(\lambda) - \frac{\eta(\lambda) + e(\lambda)}{b(\lambda)e(\lambda)} \cos \mu(\lambda) \tilde{h}(\lambda) \frac{P_0}{d_0} d(\lambda);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} S_{\rho\lambda}(t) dt - \frac{N}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} T_{\rho}(t) \operatorname{ctg} N \frac{\lambda-t}{2} dt + \\
 & + \int_{-\beta}^{\lambda} \frac{1}{\omega_0(t)b(t)} \left\{ (1-\eta(t)-e(t)) \left[\operatorname{sint} \int_{-\beta}^t (T_{\rho}(\zeta) \cos \zeta - S_{\rho\lambda}(\zeta) \sin \zeta) d\zeta - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos t \int_{-\beta}^t (T_{\rho}(\zeta) \sin \zeta + S_{\rho\lambda}(\zeta) \cos \zeta) d\zeta \right] + \int_{-\beta}^t S_{\rho\lambda}(\zeta) d\zeta \right\} dt - \\
 & - 2EhV^c(-\beta) = \int_{-\beta}^{\lambda} \frac{1}{\omega_0(t)b(t)} \left\{ (1-\eta(t)-e(t)) \cos(2\alpha+t) \times \right. \\
 & \left. \times \frac{P_0}{d_0} d(t) - \cos \mu(t) \cdot \tilde{h}(t) \frac{P_0}{d_0} d(t) \right\} dt, \quad \lambda \in [-\beta; \beta], \quad (6)
 \end{aligned}$$

де
$$C(\lambda) = \frac{\eta(\lambda) - (\eta(\lambda) + e(\lambda))^2}{e(\lambda)}.$$

Крім системи (6), повинні виконуватися умови рівноваги кожного підсилювального стрижня

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\beta}^{\beta} (T_{\rho}(t) \cos t - S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{sint}) dt + P_0 \sin 2\alpha_0 = 0; \\
 & \int_{-\beta}^{\beta} (T_{\rho}(t) \operatorname{sint} + S_{\rho\lambda}(t) \cos t) dt + P_0 \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Кільцеві зусилля T_{λ} на контурі пластинки знаходяться за формулою [8]

$$T_{\lambda}(\lambda) = \nu T_{\rho}(\lambda) + 2Eh\varepsilon_{\lambda}(\lambda), \quad \lambda \in [-\beta; 4\alpha_0 - \beta].$$

Через математичні труднощі систему рівнянь (6), (7) розв'язати неможливо. Для наближеного її розв'язання використовуємо метод механічних квадратур і колокації [9]. Квадратурні формули даного методу наведені в [7].

Результати числових розрахунків. Для підсилювальних стрижнів з параметрами $\alpha_0 = \frac{\pi}{2N}$, $\nu = 0.3$ та $E = 1$ на рис. 4 проілюстровано результати числових розрахунків контактних та кільцевих зусиль на лінії спаю пластинки та підсилювальних елементів. Верхня частина відповідає випадку $N = 6$, нижня – $N = 8$. Штрихпунктирні

лінії побудовано для $\frac{b_0}{\rho} = 0.1$, суцільні – для $\frac{b_0}{\rho} = 0.15$, а штрихові – для $\frac{b_0}{\rho} = 0.2$.

Висновки. На підставі отриманих результатів можна зробити такі висновки:

- із збільшенням висоти зуба в зоні спаю та за її межами кільцеві зусилля T_λ зменшуються;
- в околі торців підсилювальних стрижнів компоненти напружено-деформованого стану набувають необмежених значень.

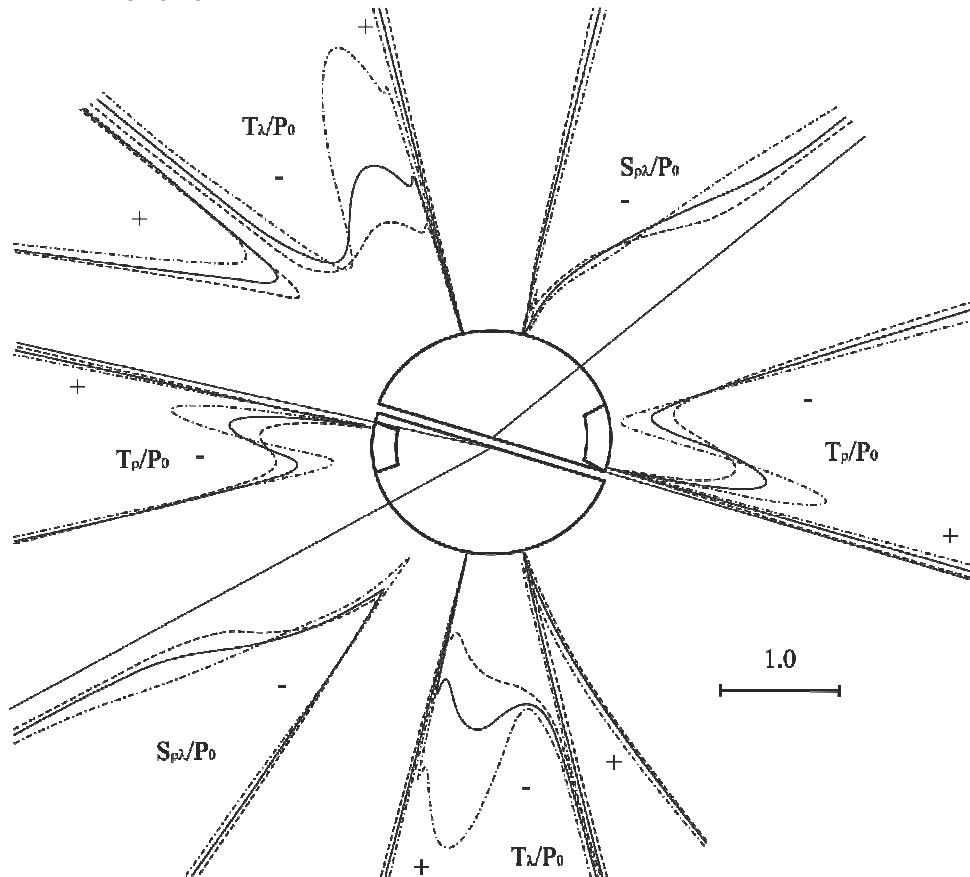


Рис. 4. Розподіл контактних та кільцевих зусиль

1. Скундин Г. И., Никитин В. Н. Шлицевые соединения. М.: Машиностроение, 1981. 124 с. 2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.

3. Мартынович Т. Л., Юринец В. Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. Львов : Вища школа, Изд-во при Львов. ун-те, 1984. 160 с. 4. Siaskyi A., Siaskyi V., Shevtsova N. The flow of concentrated force through open elastic rod to the contour of the curved hole in infinite plate. *Вісник ТНТУ*. Т. : ТНТУ, 2017. Т. 87. № 3. С. 16-25. 5. Сяський А. О., Комбель С. М. Математична модель однієї задачі трибомеханіки для шліцьового з'єднання. *Проблеми трибології*. 2004. № 2. С. 53–58. 6. Бабиш С. М. Розрахунок прямобічного шліцьового з'єднання трибосистеми «пружна пластинка – жорсткий диск». *Волинський математичний вісник*. 2011. Вип. 8(17). С. 5–14. 7. Сяський А., Комбель С. Теоретичні основи уточненого розрахунку шліцьових з'єднань / А. Сяський. *Машинознавство*. 2003. № 4 (70). С. 27–33. 8. Сяський А. А., Сяський В. А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением. *Прикл. механика*. 1983. Т. 19. №5. С. 94–99. 9. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М. : Наука, 1973. 304 с.

Рецензент: к.пед.н., доцент Павлова Н. С. (Рівненський державний гуманітарний університет)

Babysh S. M., Candidate of Engineering (Ph.D.), Muzychuk K. P., Candidate of Engineering (Ph.D.) (Rivne State University of Humanities, Rivne)

A CALCULATION OF HUB OF RECTANGULAR SPLINED JOINT

The method of a refined calculation of a tense-deformed state of hub of rectangular splined joint is suggested. Modeling hub by the endless isotropic plate with circular aperture, the contour of which is amplified by elastic curvilinear bars of a variable rigidity on equidistant parts, and splined shaft – by an absolutely hard ribbed disk, the system of two singular integral equations with Gilbert's nucleuses is constructed. An approached decision of the task is realized by the method of mechanical quadrature and collocation.

Keywords: splined joint, endless isotropic plate, amplifying bar, contact efforts, singular integral equations, method of mechanical quadrature and collocation.

Бабич С. М., к.т.н., Музычук Е. П., к.т.н. (Ровенский
государственный гуманитарный университет, г. Ровно)

РАСЧЕТ СТУПИЦЫ ПРЯМОБОЧНОГО ШЛИЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ

Предложена методика уточненного расчета напряженно-деформированного состояния ступицы прямобочного шлицевого соединения. Моделируя ее бесконечной изотропной пластинкой с круговым отверстием, контур которого на равноудаленных участках усилен упругими криволинейными брусками переменной жесткости, а шлицевой вал – абсолютно жестким ребристым диском, построена система двух сингулярных интегральных уравнений с ядрами Гильберта. Приближенное решение задачи реализовано методом механических квадратур и коллокации.

***Ключевые слова:* шлицевое соединение, бесконечная пластинка, усилительный стержень, контактные усилия, сингулярные интегральные уравнения, метод механических квадратур и коллокации.**
