

УДК 539.3

<https://doi.org/10.31713/vt2202619>

Дейнека О. Ю., (1:ORCID: 0000-0002-9749-5251)

К.Т.Н., доцент

<sup>1</sup> Національний університет водного господарства та природокористування,  
м. Рівне

## ПРО ПІДСИЛЕННЯ КОНТУРУ КРУГОВОГО ОТВОРУ В НЕСКІНЧЕНІЙ ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ ЗАМКНЕНИМ ПРУЖНИМ РЕБРОМ

Побудовано точний розв'язок задачі про напружену посадку кругового кільця сталого прямокутного поперечного перерізу в круговий отвір нескінченної ізотропної пластинки, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності. Моделюючи кільце замкненим криволінійним брусом, розрахунок якого ґрунтується на гіпотезі нормального перерізу, а лінія контакту не співпадає з геометричною віссю, побудовано інтегро-диференціальне рівняння з ядром Гільберта для визначення контактних зусиль між пластинкою і кільцем. Розв'язок задачі встановлено методом тригонометричних рядів. Знайдено мінімальний натяг, за якого відбувається розмикання ділянки контакту між пластинкою і кільцем.

**Ключові слова:** ребро жорсткості, напружена посадка, ізотропна пластина, круговий стрижень, внутрішні зусилля, нормальні напруження.

**Вступ.** Як відомо, у різних галузях машинобудування широко використовуються тонкі пружні пластинки послаблені отворами, контури яких підсилені замкненими ребрами сталої або змінної жорсткості.

Визначальним фактором міцності та довговічності у з'єднаннях виконаних шляхом зварювання (склеювання) є концентрація напружень. Огляд досліджень напруженого стану в масивних циліндричних тілах кругової форми проведено в роботах [1; 2]. Запресовка замкнених тонких пружних стрижнів в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки та задачі з використанням особливих крайових умов в інтегральній формі вивчалися в роботах [3; 4], за відсутності сил тертя у [5].

**Постановка задачі.** Розглянемо нескінчену ізотропну пластинку товщиною  $2h$  з круговим отвором радіусом  $\rho_n$ , контур якого підкріплено замкнутим пружним ребром сталого прямокутного перерізу висотою  $2h$ , шириною  $2\eta$ . Спільна серединна площина пластинки і кільця із зовнішнім радіусом  $\rho_0$  віднесені до прямокутної  $(x, y)$  і полярної  $(\rho, \lambda)$  систем відліку з початком в центрі отвору.

Пружна пластичаста конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими, прикладеними на нескінченості зусиллями  $P$  та  $q$ , (Рис. 1). Інше зовнішнє навантаження на пластинку і кільце відсутнє.

Розв'язання задачі передбачає визначення контактних зусиль між пластинкою і кільцем та мінімального створеного рівномірно розподіленими натягу  $\Delta_{\min}$ , за якого відбувається розмикання зони контакту в скінченій кількості точок, а також компонент напруженого стану в кільці.

Умовно відділивши пластинку від кільця, замінюючи дії одного тіла на інше нормальними  $T_\rho$  і дотичними

$S_{\rho\lambda}$  контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі для нескінченної пластинки з круговим отвором і круглого пружного кільця.

**Основні рівняння задачі.** Пластинка перебуває під дією зовнішнього навантаження на нескінченості та контактних зусиль на контурі  $\gamma$ . Її напружено-деформований стан характеризується співвідношеннями [3]

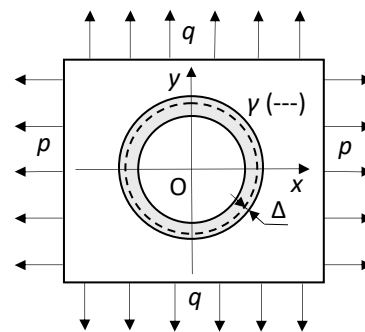


Рис. 1. Пружне кільце  
запресоване в пластинку

$$\begin{aligned}\varepsilon_\lambda &= \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu)T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t)dt + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t)ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\ &\quad \left. + p + q - 2(p-q)\cos(2\lambda) \right], \\ V &= \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t)dt - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t)ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\ &\quad \left. + 2(p-q)\sin(2\lambda) \right], \\ k^n(\lambda) &= \frac{1}{\rho_n} \left( 1 - \varepsilon_\lambda + \frac{dV}{d\lambda} \right).\end{aligned}\tag{1}$$

Тут введено позначення:  $\varepsilon_\lambda, V$  – відносно видовження контуру  $\gamma$  і кут повороту нормалі до нього;  $k^n(\lambda), E, \nu$  – кривина контуру  $\gamma$  внаслідок деформації, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Напружено-деформований стан пластинки з криволінійним ребром жорсткості, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, суттєво залежить від вибору математичної моделі, що описує деформацію ребра.

Найбільш поширеними в науковій літературі є три моделі замкнутого або розімкнутого криволінійного пружного ребра:

- модель стрингера – гнучка пружна плоска лінія, яка наділена сталою або змінною жорсткістю на розтяг (стиск) і співпадає з віссю ребра. Така модель не враховує поперечні розміри підсилення і придатна для вивчення гнучких, але жорстких відносно розтягу (стиску) ребер. Відповідно до цієї моделі при переході через вісь ребра виникають стрибки нормальних та дотичних зусиль, а компоненти вектора зміщення залишаються неперервними;

- балкова модель – штивна пружна плоска лінія, наділена сталими або змінними жорсткостями на розтяг (стиск) і згин в її площині. Ця модель придатна для відносно жорстких і штивних ребер. Вона породжує стрибки нормальних та дотичних зусиль. Поле зміщень при переході через вісь ребра залишається неперервним;

- криволінійний стрижень сталого прямокутного поперечного перерізу, серединна поверхня якого не співпадає з нульовою поверхнею для чистого згину.



Ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем (брусом) геометрична вісь, якого не співпадає з фактичною лінією контакту [6].

Компоненти напруженого стану кільця (поперечна  $Q$ , поздовжня  $N$  сили та згинальний момент  $L_b$ ), які віднесені до його осі, визначаються залежностями

$$T_\rho(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\rho_0} - \frac{dQ(\lambda)}{ds}, \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = -\frac{Q(\lambda)}{\rho_0} - \frac{dN(\lambda)}{ds},$$

$$\frac{dL_b(\lambda)}{ds} - \eta \frac{dN(\lambda)}{ds} - Q(\lambda) = 0, \quad (2)$$

де  $s$  – дуга на контурі контакту ребра, до якого прикладене зовнішнє навантаження.

Формули для визначення відносного видовження  $\varepsilon_\lambda^c(\lambda)$  та кута повороту нормалі  $\theta_b$  в точках крайнього поздовжнього волокна кільця, яке контактує з пластинкою мають вигляд [6]:

$$\varepsilon_\lambda^c(\lambda) = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c}{\rho_0 \eta_c} L_b(\lambda) \right], \quad \frac{d\theta_b}{d\lambda} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ N(\lambda) + \frac{L_b(\lambda)}{\eta_c} \right],$$

$$k^c(\lambda) = \frac{1}{\rho_0} \left( 1 - \varepsilon_\lambda^c + \frac{d\theta_b}{d\lambda} \right) = \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{r_0 L_b}{\rho_0 \eta_c E_0 F_0} \right). \quad (3)$$

Тут введено такі позначення:  $E_0$  – модуль Юнга матеріалу ребра;  $E_0 F_0$  – жорсткість стрижня на розтяг (стиск);  $E_0 J_0$  – жорсткість на згин;  $F_0 = 2h_0 \cdot 2\eta$  – площа поперечного перерізу;  $r_0$  – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна стрижня;  $R$  – радіус кривини осі стрижня;  $\eta_c$  – відстань від осі ребра до нейтрального для чистого згину поздовжнього волокна;  $J_0 = F_0 R \eta_c$ .

Граничні умови на межі контакту пластинки і ребра формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту в диференціальній формі

$$\varepsilon_\lambda(\lambda) = \varepsilon_\lambda^{(c)}(\lambda); \quad V(\lambda) = \theta_b(\lambda), \quad \lambda \in [0; 2\pi]. \quad (4)$$

Підстановка (1), (3) в ці граничні умови призводить до системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu)T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t) dt + \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\ & \left. + p + q - 2(p-q) \cos(2\lambda) \right] = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c}{\rho_0 \eta_c} L_b(\lambda) \right], \\ & \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu)S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t) dt - \frac{1}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + \right. \\ & \left. + 2(p-q) \sin(2\lambda) \right] = \frac{1}{E_0 F_0} \int_0^\lambda \left[ N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c} \right] dt, \end{aligned} \quad (5)$$

яка разом із співвідношеннями (2) та умовою однозначності кута повороту нормалі  $\theta_b$  до зовнішнього контуру ребра

$$\oint_\gamma \left[ N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c} \right] dt = 0 \quad (6)$$

визначає математичну модель даної задачі.

**Побудова розв'язку задачі.** Оскільки контакт між пластинкою та ребром неперервний, а задача є симетричною відносно координатних осей, то функції  $T_\rho$ ,  $S_{\rho\lambda}$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $L_b$  обираємо у вигляді

$$\begin{aligned} T_\rho(\lambda) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M A_{2n} \cos 2n\lambda, & S_{\rho\lambda}(\lambda) &= \sum_{n=1}^M B_{2n} \sin 2n\lambda, \\ N(\lambda) &= \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^M C_{2n} \cos 2n\lambda, & Q(\lambda) &= \sum_{n=1}^M E_{2n} \sin 2n\lambda, \\ L_b(\theta) &= \frac{D_0}{2} + \sum_{n=1}^M D_{2n} \cos 2n\lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

Підстановка (7) в співвідношення (5), (2), (6), на підставі співвідношень [7]

$$\oint_\gamma \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt = 0, \quad \frac{1}{\pi} \oint_\gamma \left\{ \begin{array}{l} \cos mt \\ \sin mt \end{array} \right\} \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt = 2 \left\{ \begin{array}{l} \sin m\lambda \\ -\cos m\lambda \end{array} \right\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

призводить до системи функційних рівнянь для визначення сталих  $A_0, C_0, D_0, A_{2n}, B_{2n}, C_{2n}, D_{2n}, E_{2n}$  ( $n = \overline{1, M}$ ).



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu) \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M A_{2n} \cos 2n\lambda \right) - A_0 - \right. \\
& \left. - 2 \sum_{n=1}^M B_{2n} \sin 2n\lambda + p + q - 2(p-q) \cos(2\lambda) \right] = \\
& = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^M C_{2n} \cos 2n\lambda + \frac{\eta + \eta_c}{\rho_0 \eta_c} \left( \frac{D_0}{2} + \sum_{n=1}^M D_{2n} \cos 2n\lambda \right) \right], \\
& \frac{1}{2Eh} \left[ (1-\nu) \sum_{n=1}^M B_{2n} \sin 2n\lambda - 2 \sum_{n=1}^M A_{2n} \sin 2n\lambda + 2(p-q) \sin(2\lambda) \right] = \\
& = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ \frac{C_0}{2} \lambda + \frac{1}{2n} \sum_{n=1}^M C_{2n} \sin 2n\lambda + \frac{D_0}{2\eta_c} \lambda + \frac{1}{2n\eta_c} \sum_{n=1}^M D_{2n} \sin 2n\lambda \right], \\
& \rho_0 \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^M A_{2n} \cos 2n\lambda \right) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^M C_{2n} \cos 2n\lambda - 2 \sum_{n=1}^M n E_{2n} \cos 2n\lambda, \\
& \rho_0 \sum_{n=1}^M B_{2n} \sin 2n\lambda = - \sum_{n=1}^M E_{2n} \sin 2n\lambda - 2 \sum_{n=1}^M n C_{2n} \sin 2n\lambda, \\
& 2 \sum_{n=1}^M n D_{2n} \sin 2n\lambda - 2\eta \sum_{n=1}^M n C_{2n} \sin 2n\lambda - \rho_0 \sum_{n=1}^M E_{2n} \sin 2n\lambda = 0, \quad \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{2\eta_c} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Порівнюючи у (8) коефіцієнти при однакових гармоніках одержимо системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2Eh} \left[ (-1-\nu) \frac{A_0}{2} + p + q \right] = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ \frac{C_0}{2} + \frac{\eta + \eta_c}{\rho_0 \eta_c} \frac{D_0}{2} \right], \\ \rho_0 \frac{A_0}{2} = \frac{C_0}{2}, \quad \frac{C_0}{2} + \frac{D_0}{2\eta_c} = 0; \\ \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)A_2 - 2B_2 - 2(p-q)] = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ C_2 + \frac{\eta + \eta_c}{\rho_0 \eta_c} D_2 \right], \\ \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)B_2 - 2A_2 + 2(p-q)] = \frac{1}{E_0 F_0} \left[ \frac{C_2}{2} + \frac{D_2}{2\eta_c} \right], \\ \rho_0 A_2 = C_2 - 2E_2, \quad \rho_0 B_2 = -E_2 - 2C_2, \quad 2D_2 - 2\eta C_2 - \rho_0 E_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2Eh}[(1-\nu)A_{2n} - 2B_{2n}] = \frac{1}{E_0F_0} \left[ C_{2n} + \frac{\eta + \eta_c}{\rho_0\eta_c} D_{2n} \right], \\ \frac{1}{2Eh}[(1-\nu)B_{2n} - 2A_{2n}] = \frac{1}{E_0F_0} \left[ \frac{C_{2n}}{2n} + \frac{D_{2n}}{2n\eta_c} \right], \\ \rho_0 A_{2n} = C_{2n} - 2nE_{n2}, \quad \rho_0 B_{2n} = -E_{2n} - 2nC_{2n}, \quad 2nD_{2n} - 2\eta nC_{2n} - \rho_0 E_{2n} = 0. \end{cases}$$

З яких визначаємо

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2(p+q)E_0F_0}{2Eh(\rho_0 - \eta - \eta_c) + (1+\nu)E_0F_0}, \quad C_0 = \frac{2\rho_0(p+q)E_0F_0}{2Eh(\rho_0 - \eta - \eta_c) + (1+\nu)E_0F_0}, \\ D_0 &= \frac{-2\rho_0(p+q)E_0F_0\eta_c}{2Eh(\rho_0 - \eta - \eta_c) + (1+\nu)E_0F_0}, \\ A_2 &= \frac{-(g_{12} + 2g_{22})b_2}{g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21}}, \quad B_2 = \frac{(g_{11} + g_{21})b_2}{g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21}}, \quad C_2 = \frac{\rho_0}{5}(A_2 - 2B_2), \end{aligned} \quad (9)$$

$$D_2 = \frac{\rho_0}{5}((\eta - \rho_0)A_2 - (2\eta + 0,5\rho_0)B_2), \quad E_2 = -\frac{\rho_0}{5}(2A_2 + B_2),$$

$$b_2 = 10E_0F_0\eta_c(p - q).$$

де

$$g_{11} = 2Eh\eta(\eta + \eta_c - \rho_0) - 5(1-\nu)E_0F_0\eta_c,$$

$$g_{12} = -2Eh\eta(2\eta + 2\eta_c + 0,5\rho_0) - 5Eh\rho_0\eta_c + 10E_0F_0\eta_c,$$

$$g_{21} = Eh\rho_0(2\eta - \rho_0) + 10E_0F_0\eta_c,$$

$$g_{22} = -Eh\rho_0(4\eta + 0,5\rho_0) - 5(1-\nu)E_0F_0\eta_c;$$

$$A_{2n} = B_{2n} = C_{2n} = D_{2n} = E_{2n} = 0, \quad \text{якщо } n > 1.$$

Граничні умови (4) зумовлюють виконання рівності  $k^c(\lambda) = k^n(\lambda)$ , яка має вигляд

$$\frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{r_0 L_b}{\rho_0 \eta_c E_0 F_0} \right) = \frac{1}{\rho_n} \left( 1 - \varepsilon_n + \frac{dV}{d\lambda} \right).$$

Остання рівність, згідно  $(\Delta = \rho_0 - \rho_n, \rho_0 \approx \rho_n)$  набуває виду



$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta}{\rho_0 \rho_n} + \frac{r_0}{\rho_0^2 \eta_c E_0 F_0} \left( \frac{D_0}{2} + D_2 \cos 2\lambda \right) &= \frac{1}{2Eh\rho_n} \left[ (\nu-1) \frac{A_0}{2} + (\nu-1) A_2 \cos 2\lambda + A_0 + \right. \\
&+ B_2 \cos 2\lambda + \frac{d}{d\lambda} \left( (1-\nu) B_2 \sin 2\lambda - A_2 \sin 2\lambda \right) - p - q + 6(p-q) \cos(2\lambda) \Big] = \\
&= \frac{1}{2Eh\rho_n} \left[ (1+\nu) \frac{A_0}{2} + ((\nu-3) A_2 + (3-2\nu) B_2) \cos 2\lambda - p - q + 6(p-q) \cos(2\lambda) \right].
\end{aligned}$$

Розмикання можливе лише в скінченній кількості точок, якщо  $T_\rho(\lambda) \leq 0$ . Для знаходження мінімального натягу, на підставі (7), (9), з умови  $\max_{\lambda \in [0; \pi/2)} T_\rho(\lambda) = 0$ , отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta}{\rho_0 \rho_n} + \frac{r_0}{\rho_0^2 \eta_c E_0 F_0} \left( \frac{D_0}{2} + D_2 \cos 2\lambda \right) &= \\
&= \frac{1}{2Eh\rho_n} \left[ (-4A_2 + (3-2\nu) B_2) \cos 2\lambda - p - q + 6(p-q) \cos(2\lambda) \right].
\end{aligned}$$

Із якого, для конкретних значень  $p, q, \nu, E, E_0, \eta, \eta_c, h, \rho_n, \rho_0$ , знаючи положення точок розмикання  $\lambda_1^* = \pi(1 - \operatorname{sgn}(p-q))/4$ ,  $\lambda_2^* = \lambda_1^* + \pi$ ; визначаємо мінімальний натяг  $\Delta_{\min}$ .

Аналізуючи отримані результати приходимо до таких висновків:

- метод тригонометричних рядів є найбільш ефективним для отримання точного розв'язку в задачах із круговою симетрією та повним контактом;

- запропоновані методики дозволяють не лише визначати напружений стан конструкції, а й прогнозувати умови втрати цілісності з'єднання, що є ключовим для інженерного проектування;

- мінімальний натяг  $\Delta_{\min}$  залежить не тільки від зовнішнього навантаження, але й від фізико-геометричних параметрів кільця;

- перенесення на ортотропні пластинки з круговим отвором запропонованого методу розв'язання задачі без суттєвих змін викликає труднощі.

1. Чернець М. Моделювання і аналіз трибоконтактної взаємодії у циліндричних спраженнях. Машинознавство. – 2003. – № 2(68). С. 30-33. 2. Семенов-Ежов И.Е. Проблема концентрации напряжений в соединениях с

натягом (обзор) . Вестник машиностр. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2001. – № 4. – С. 37-40. 3. Мартынович Т.Л., Юринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами / Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с. 4. Мартынович Т.Л., Зварич М.К. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки. Прикладная механика. – 1974. – Т.10, Вып.9. – С. 46-52. 5. Дейнека О. Ю., Сяський В. А. Напружена посадка замкнутого кругового стержня в круговий отвір нескінченної ізотропної пластинки. Вісник НУВГП. Сер. Технічні науки : зб. наук. праць. Рівне : НУВГП, 2016. Вип. 2 (74). С. 349–356. 6. Сяський А., Шевцова Н. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів. Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – № 3 (79). – С. 24-30. 7. Сяський А.А., Сяський В.А. Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением. Прикладная механика. –1983. – Т. 19. – № 5. –С. 94-99.

## REFERENCES:

1. Chernets' M . Modelyuvannya ta analiz trybokontaktynoi vzayemodiyi u tsylindrychnykh spryazhennyakh. Mashynoznavstvo. – 2003. – № 2(68). S. 30-33. 2. Semenov-Ezhov Y.E. Problema kontsentratsiyi napruzhenn' v z'yednannyakh z natyhom (ohlyad) . Vestnyk mashynostr. MHTU im. N.E. Baumana. – 2001. – № 4. – С. 37-40. 3. Martynovych T.L., Yurynets V.E. Kontaktnye vzaymodeystviya plastyn s upruhymy élementamy / L'viv: Vyshcha shkola. Yzd-vo pry L'vov. un-te, 1984. – 160 s. 4. Martynovych T.L., Zvarych M.K. Vdavlyuvannya zamknutoho sterzhnya v kryvolynейnoe otverstye izotropnoyi plastynky. Prykladnaya mekhanyka. – 1974. – Т.10, Vyp.9. – С. 46-52. 5. Deyneka O . YU., Syas'kyy V. A. Napruzhena posadka zakrytoho kruhovoho stryzhnya v kruhovyy otvir neskinchennoyi izotropnoyi plastynky. Visnyk NUVHP. Ser. Tekhnichni nauky : zb. nauk. prats'. Rivne : NUVHP, 2016. Vyp. 2 (74). S. 349–356. 6. Syas'kyy A. , Shevtsova N . Zastosuvannya metodu syly dlya statychnoho rozrakhunku zakrytykh kryvoliniynykh stryzhniv. Visnyk Ternopil's'koho natsional'noho tekhnichnoho universytetu. – 2015. – № 3 (79). – С. 24-30. 7. Syas'kyy A.A., Syas'kyy V.A. Napryazhennoe stan kusochno-odnorodnoy plastynky z upruhym vklyuchennyam. Prykladnaya mekhanyka. – 1983. – Т. 19. – № 5. –С. 94-99.

---

**Dejneka O.,** (1:ORCID: 0000-0002-9749-5251)  
PhD, associate professor

<sup>1</sup> National university of water and environmental engineering, Rivne

## ON REINFORCEMENT OF THE CIRCULAR HOLE CONTOUR IN AN INFINITE ISOTROPIC PLATE BY A CLOSED ELASTIC RIB

The determining factor in strength and durability in joints made by welding (gluing) is stress concentration. An exact solution to the problem of the stress fit of a circular ring of constant rectangular cross-section into a circular hole of an infinite isotropic plate, which is in a homogeneous stress state at infinity, is constructed. The boundary conditions at the contact interface of the plate and the rib are formulated as conditions of ideal mechanical contact in differential form. Modeling the ring by a closed curved beam, the calculation of which is based on the hypothesis of a normal section, and the contact line does not coincide with the geometric axis, an integro-differential equation with a Hilbert kernel is constructed to determine the contact forces between the plate and the ring. Since the contact between the plate and the edge is continuous, and the problem is symmetric with respect to the coordinate axes, the solution to the problem is established by the method of trigonometric series. The minimum tension at which the contact area between the plate and the ring opens is found. The proposed methods allow not only to determine the stress state of the structure, but also to predict the conditions for the loss of integrity of the connection, which is key for engineering design.

**Keywords:** reinforcing edge, tense landing, isotropic plate, circular bar, internal efforts, normal tensions.

---

Отримано: 30 березня 2026 року

Прорецензовано: 2 травня 2026 року

рийнято до друку: 29 травня 2026 року



© 2026 [Dejneka O.]. Licensee [NUWEE]. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial (CC BY-NC) license ([creativecommons.org](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)).