

УДК 620.179

<https://doi.org/10.31713/vt1202640>

Мащенко В. А. [1; ORCID ID: 0000-0001-6968-762X],
д-р. техн. наук, доцент
Матус С. К. [1; ORCID ID: 0000-0002-6184-5184],
канд. техн. наук, доцент
Кривцов В.В. [2; ORCID ID: 0000-0002-8338-645X],
канд. фіз.-мат. наук, доцент
Шевчук Т. М. [2; ORCID ID: 0000-0002-8351-2161],
канд. фіз.-мат. наук, доцент
Бордюк М. А. [3; ORCID ID: 0000-0001-7693-8343],
канд. фіз.-мат. наук, доцент

¹ Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне

² Рівненський державний гуманітарний університет

³ Рівненська медична академія

ДО ПИТАННЯ ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ПРУЖНОСТІ КОНСОЛЬНО ЗАКРІПЛЕНОГО СТРИЖНЯ РЕЗОНАНСНИМ МЕТОДОМ

У роботі розглянуто деякі аспекти уточнення комплексного модуля пружності матеріалу консольно закріпленого стрижня при його визначенні резонансним методом. Для полімерних конструкційних матеріалів, що характеризуються значними механічними втратами, отримано співвідношення для визначення дійсної частини комплексного модуля пружності та тангенса механічних втрат консольно закріплених стрижнів прямокутного й круглого поперечних перерізів. Проведені теоретичні розрахунки коефіцієнтів, які визначають поправки до дійсної частини комплексного модуля пружності та тангенса кута механічних втрат. З урахуванням інерції обертання та напружень зсуву в консольно закріпленому стрижні отримано вираз для відношення власної резонансної частоти коливань до частоти, теоретично розрахованої на основі рівняння коливань. Проведено теоретичні розрахунки відношення частот коливань для діапазону можливих значень коефіцієнта Пуассона матеріалу стрижня.

Ключові слова: резонансний метод, частота коливань, модуль пружності, тангенс кута механічних втрат, коефіцієнт Пуассона.



Актуальність напрямку дослідження.

Резонансний метод це – один із найбільш поширених експериментальних методів дослідження в'язкопружних властивостей різного типу конструкційних полімерних матеріалів. Він дозволяє визначити дійсну частину модуля пружності (E') і тангенс кута механічний втрат ($tg\delta$) у звуковому діапазоні частот.

Для тонких стрижнів модуль E' визначається за співвідношенням, яке можна отримати із простого двочленного рівняння при коливаннях під дією сили, що прикладається до закріпленого кінця [1]:

$$\frac{E^* \chi^2}{\rho} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де ρ – густина матеріалу стрижня, $u(x,t)$ – функція залежності поперечних зміщень точок осі стрижня від координати x та часу t , E^* – комплексний модуль пружності, χ – радіус інерції поперечного перерізу стрижня.

Дійсну частину комплексного модуля пружності E^* визначають таким чином [2]:

$$E'_i = \frac{4\pi^2 \rho l^4 f_r^2}{a_n^4 \chi^2}, \quad (2)$$

де l – довжина стрижня, f_r – резонансна частота коливання стрижня, a_n – деякі числа, що є розв'язками рівняння при врахуванні граничної умови на кінці стрижня під час коливання, n – порядковий номер моди коливання.

Для стрижнів, із скінченим відношенням товщини стрижня (d) до його довжини l , резонансні частоти його коливань будуть нижче частот, що відповідають рівнянню (1) а обчислення модуля E' за співвідношенням (2) потребує включення в нього додаткового множника, який визначає поправку до f_r в залежності від форм-фактора, який є відношенням d/l .

В проведених раніше дослідженнях зразків ряду конструкційних полімерних матеріалів [3] відношення d/l було достатньо малим (0,023–0,025) і поправка до резонансної частоти в таких випадках є малою, що відповідно не впливає на визначення величини E' .

Однак у тих випадках, коли необхідно використовувати відносно товсті або короткі стрижні, у яких значення форм-фактора перевищує 0,06–0,07, невірне обчислення поправки може внести у величину модуля пружності значну похибку. При значеннях форм-фактора, які лежать у межах 0,15–0,2, ця похибка може сягати 30–50%.

Аналіз публікацій та постановка завдання.

На сьогодні опубліковано ряд робіт де розглядаються питання визначення модуля пружності консольно закріпленого стрижня резонансним методом.

Автори роботи [4] аналізують початкову резонансну частоту коливань значно деформованих консольних балок, вказуючи, що значна деформація змінює геометричну жорсткість та впливає на власні частоти коливань. Отримані теоретичні результати показують, що розбіжність між частотами збільшуються із довжиною балок, що пов'язано із зміною потенціальної енергії згину та кінетичного відгуку системи. Також детально розглядається вплив попередньої деформації балок на резонансні частоти, що є суттєво для оцінки енергії коливань та зміщень.

В роботі [5] проведено аналіз власних частот коливань та форми мод коливань композитних консолей. Для теоретичної моделі з використанням 8-вузлових елементів показано, що частота коливань залежить від модуля пружного матеріалу, енергії коливань і зміщення.

В [6] проведено теоретичне, чисельне та експериментальне дослідження вільних резонансних коливань консольно закріпленого стрижня. Запропонована в роботі модель описує кількісно власні частоти та режими коливань, включаючи вимірювання зміщень та енергетичні аспекти.

Отже метою статті є огляд питання обчислення поправок, що враховують скінченність відношення d/l геометричних розмірів стрижня та динамічних характеристик матеріалу, для уточнення власних резонансних частот коливань та модуля пружності конструкційних полімерних матеріалів у діапазоні можливих значень коефіцієнта Пуассона (ν).

Виклад основного матеріалу.

Розв'язок рівняння (1) представимо у вигляді гармонічної функції:

$$u(x, t) = X(x)e^{i\omega t}. \quad (3)$$

Як результат отримаємо таке рівняння:

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} + k^* X(x) = 0, \quad (4)$$

де k^* – комплексне хвильове число.

Загальний розв'язок рівняння (4) представимо таким чином:

$$X(x) = A_1 \cos k^* x + A_2 \sin k^* x + A_3 \operatorname{ch} k^* x + A_4 \operatorname{sh} k^* x,$$

де A_i – деякі константи.

Граничні умови на кінцях зразка мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} X(0) &= X'(0) = 0; \\ X''(l) &= X'''(l) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де l – довжина зразка.

Інтеграл рівняння (2.1.3), що задовольняє умові $x=0$, має такий вигляд:

$$X(x) = \frac{1}{2} A_3 (\operatorname{ch} k^* x - \cos k^* x) + \frac{1}{2} A_4 (\operatorname{sh} k^* x - \sin k^* x). \quad (7)$$

Умова на кінці стрижня $x=l$ дає наступну систему рівнянь [2]:

$$\begin{cases} A_3 (\operatorname{ch} k^* l + \cos k^* l) + A_4 (\operatorname{sh} k^* l + \sin k^* l) = 0, \\ A_3 (\operatorname{sh} k^* l - \sin k^* l) + A_4 (\operatorname{ch} k^* l + \cos k^* l) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

де

$$(\operatorname{ch} k^* l + \cos k^* l)^2 - (\operatorname{sh}^2 k^* l - \sin^2 k^* l) = 0, \quad (9)$$

або

$$\operatorname{ch} k^* l \cos k^* l + 1 = 0. \quad (10)$$

Покладаючи $k^* l = a + ib$, при резонансі стрижня за умови $a = a_n$; $b = 0$, можна отримати співвідношення для амплітуди коливань зразка [7]:

$$X_n(x) = C \left(\operatorname{ch} a_n x - \cos a_n x - \frac{(\operatorname{sh} a_n x - \sin a_n x)^2}{\operatorname{ch} a_n x + \cos a_n x} \right), \quad (11)$$

де a_n – корені рівняння (10), C – деяка константа.

Величини a та b визначаються наступним чином [2]:

$$a \cong \frac{\omega^{\frac{1}{2}} l}{\left(\frac{E \chi^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{4}}} \square \square \square \square \square \square b \cong \frac{1}{4} \frac{\omega^{\frac{1}{2}} l}{\left(\frac{E \chi^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{4}}} \operatorname{tg} \delta \square \quad (12)$$

Перші чотири корені рівняння (10) відповідно рівні [1]:

$$kl = 1,8751; 4,6941; 7,8548; 10,9965 \quad (13)$$

На рис. 1. представлені залежності нормованої амплітуди X від довжини стрижня для чотирьох значень kl .

Для прямокутного стрижня $\chi^2 = \frac{d^2}{12}$, для стрижня з круглим перерізом (діаметр d) $\chi^2 = \frac{d^2}{16}$.

Відповідно при основній резонансній частоті f_1 , якій відповідає найменший за значенням корінь (13) рівняння (10), отримаємо співвідношення для дійсної частини модуля пружності стрижня із прямокутним ($\square$) перерізом:

$$E'_{\square} = \frac{48\pi^2 \rho l^4 f_1^2}{1,8751^4 d^2}, \quad (14a)$$

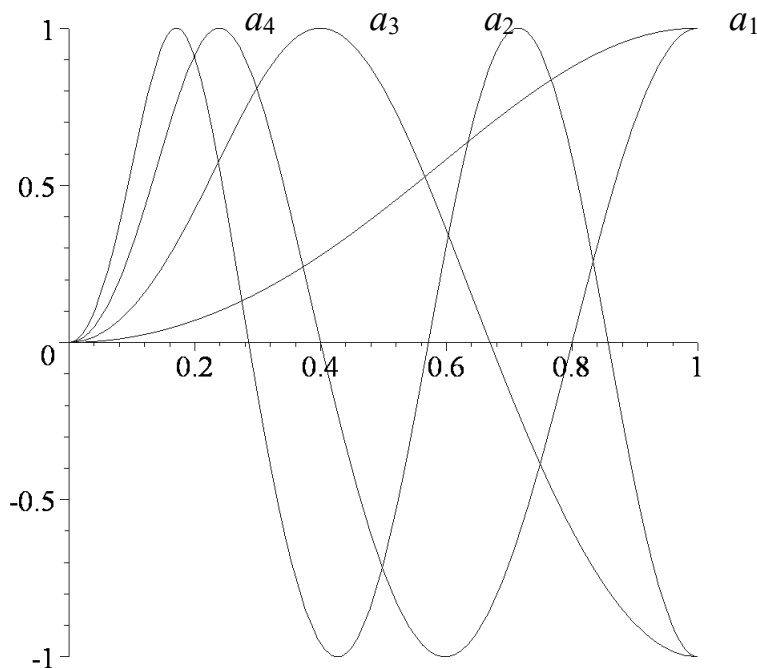


Рис. 1. Нормовані амплітуди для чотирьох значень a_n .

для стрижня із круговим ($\circ$) перерізом:



$$E'_{\emptyset} = \frac{64\pi^2 \rho l^4 f_1^2}{1,8751^4 d^2}. \quad (146)$$

Для величини $tg\delta$ маємо таку рівність:

$$tg\delta = \frac{\Delta f_1}{f_1}. \quad (15)$$

де Δf_1 – ширина резонансної кривої на висоті половини амплітудного максимуму.

Якщо полімерний матеріал володіє значними механічними втратами, то власні частоти є дещо іншими, ніж розраховані класичними методами теорії пружності. Так для в'язкопружного матеріалу з постійною динамічною в'язкістю вирази для $E'_{\square}$ ($E'_{\emptyset}$) та $tg\delta$, уточнені з врахуванням дисипативних втрат будуть мати такий вигляд [8]:

$$E'_{\square} = \frac{48\pi^2 \rho l^4}{1,8751^4 d^2} f_1^2 S_E; \quad (16)$$

$$E'_{\emptyset} = \frac{64\pi^2 \rho l^4}{1,8751^4 d^2} f_1^2 S_E; \quad (17)$$

$$tg\delta = \frac{\Delta f_1}{f_1} S_{tg\delta}, \quad (18)$$

$$\text{де } S_E = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta f_1}{f_1} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta f_1}{f_1} \right)^4 \right) \quad \text{та}$$

$$S_{tg\delta} = \left(1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta f_1}{f_1} \right)^2 + \frac{23}{32} \left(\frac{\Delta f_1}{f_1} \right)^4 \right).$$

Відповідно, уявна частина E'' комплексного E^* при відомих E' та $tg\delta$ визначиться таким чином:

$$E'' = E' tg\delta. \quad (19)$$

Теоретична оцінка величин S_E та $S_{tg\delta}$ від Δf_1 , в діапазоні значень від 5–25 Гц, та f_1 , відповідно, 50–200 Гц представлені на рис. 2, 3.

Аналіз отриманих даних показує, що величина поправки S_E до модуля пружності в діапазоні визначених частот не перевищує значення 1,12, а величина поправки до тангенса механічних втрат $S_{tg\delta}$ не менше 0,86.

Для стрижня із скінченим відношенням d/l коливання на згин можуть бути описані рівнянням, яке отримане із рівняння (1) шляхом додавання до нього ряду членів, що обумовлюють збільшення кінетичної енергії і зміну зміщення його точок внаслідок коливань на згин. Розв'язок уточненого рівняння дозволить виразити резонансні частоти стрижня через його густину, геометричні розміри і пружні сталі або, навпаки, виразити модуль пружності через резонансні частоти, густину, геометричні розміри і коефіцієнт Пуассона.

В роботі [9] Тимошенко С.П. отримав рівняння, яке достатньо точно описує коливання на згин із скінченим відношенням d/l додавши до рівняння (1) члени, які враховують поправку на інерцію обертання і напругу на зсув:

$$\frac{E\chi^2}{\rho} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \chi^2 \left(1 + \frac{E}{K'\mu} \right) \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\chi^2 \rho}{K'\mu} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = 0. \quad (20)$$

де μ – модуль зсуву, K' – константа, введена Тимошенком С.П., яка залежить від форми поперечного перерізу і рівна відношенню середнього кута зсуву по перерізу до кута на нейтральній осі.

При резонансних частотах коливань, що відповідають рівнянню (20), для шарнірно закріпленого стрижня, умови на кінцях повинні задовольняти такому розв'язку [9]:

$$u = C \sin \frac{n\pi x}{l} \cos 2\pi f_n t.$$

де n – число півхвиль на довжині стрижня, рівне порядковому номеру моди коливань.

Підстановка співвідношення (21) в рівняння (20) і нехтування останнім членом, як величиною другого порядку малості, дає можливість отримати вираз, який пов'яже власну резонансну частоту коливань стрижня f_n з частотою $f_n^* = \frac{E\chi^2 n^2}{2\rho l^2}$, що

відповідає розв'язку рівняння (1):



$$\frac{f_n^*}{f_n} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \chi^2 n^2}{l^2} \left(1 + \frac{2(\nu + 1)}{K'} \right).$$

Модуль пружності, в такому випадку, може бути розрахований за співвідношеннями (14) для тонкого стрижня, якщо замість виміряної частоти f_n підставити частоту f_n^* .

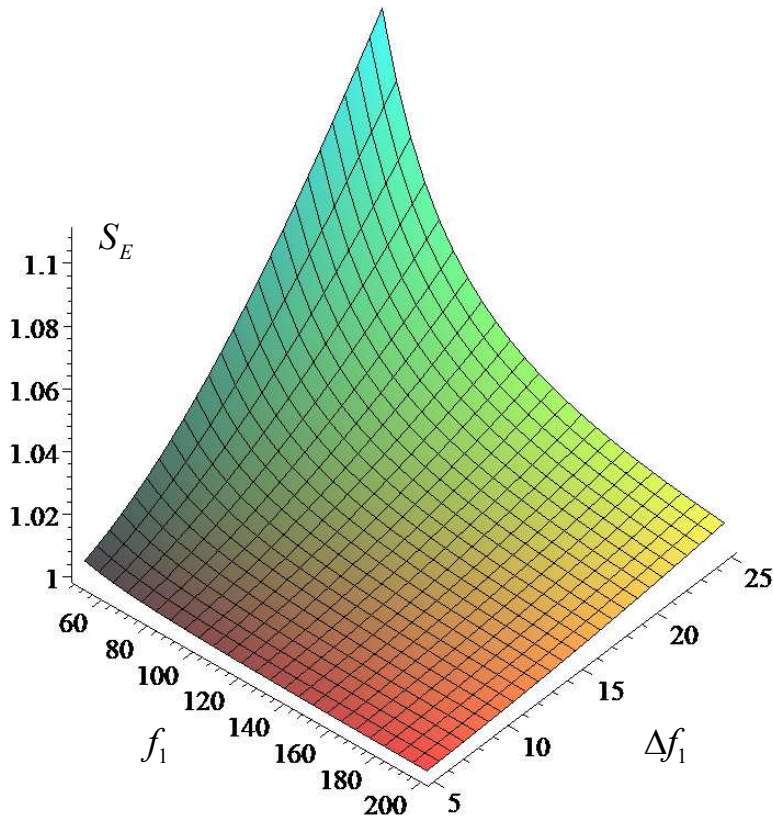


Рис. 2. Діаграма залежності величин S_E від Δf_1 та f_1 .

Теоретичні оцінки відношення частот $\frac{f_n^*}{f_n}$ в залежності від величини d/l в діапазоні значень до 0,2, для різних значень коефіцієнт Пуассона матеріалу стрижня, при значенні константи Тимошенко рівній $K' = 2/3$ [11] представлені на рис. 4.

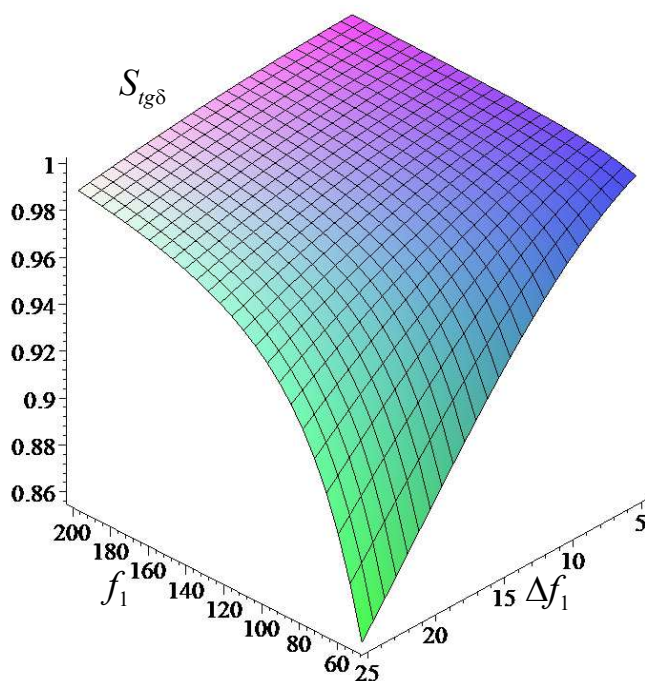


Рис. 3. Діаграма залежності величин $S_{lg\delta}$ від Δf_1 та f_1 .

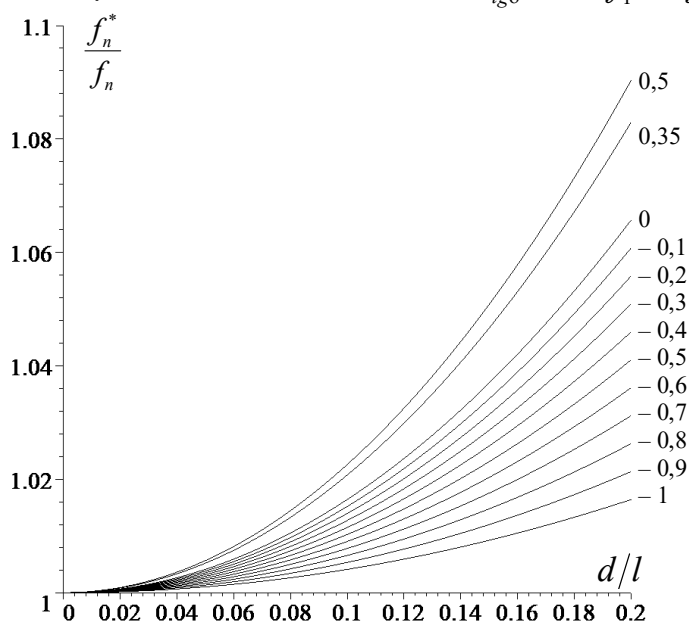


Рис. 4. Залежності відношення частот $\frac{f_n^*}{f_n}$ від величини форм-фактора для значень коефіцієнта Пуассона ν у діапазоні від -1 до $0,5$.



Отримані теоретичні розрахунки показують, що відношення $\frac{f_n^*}{f_n}$ зростає із збільшенням величини d/l при всіх значеннях коефіцієнта Пуассона ν . Максимальне значення відношення $\frac{f_n^*}{f_n}$

спостерігається для конструкційних матеріалів із $\nu = 0,5$ (наприклад каучук) і рівне 1,096. Для матеріалів із коефіцієнтом Пуассона – 1 (наприклад термопластичний поліуретан [12]) максимальне значення $\frac{f_n^*}{f_n}$ дорівнює 1,016.

Для більшості конструктивних полімерних матеріалів (наприклад: поліетилен, поліпропілен, полівінілхлорид, полістирол, поліетилентерафталат) коефіцієнт Пуассона знаходиться в околі значення 0,35. Максимальне значення відношення частот, в такому випадку, $\frac{f_n^*}{f_n}$ при максимальному значенні відношення d/l рівне 1,084.

Висновки

Для полімерних конструкційних матеріалів, які володіють значними механічними втратами, отримані співвідношення для визначення дійсної частини комплексного модуля пружності та тангенса механічних втрат консольно закріплених стрижнів із прямокутним та круговим перерізом при резонансному методі вимірювань.

Теоретичні розрахунки коефіцієнтів, які визначають поправки до дійсної частини комплексного модуля пружності та тангенса кута механічних втрат, показали, що відносні похибки визначення уточнених значень відповідних величин не перевищують 11 % та 16 % при мінімальній резонансній частоті коливань та максимальній ширині резонансної кривої на висоті половини амплітудного максимуму. Із збільшенням резонансної частоти коливань або зменшенням ширини резонансного максимуму відносні похибки визначення уточнених значень будуть зменшуватися.

Із врахуванням інерції обертання і напруги на зсув у консольно закріпленому стрижні отримано вираз для відношення власної резонансної частоти коливання до теоретично розрахованої із рівняння коливань.

Проведені теоретичні розрахунки відношення частот коливань для діапазону можливих значень коефіцієнта Пуассона матеріалу стрижня показали, що максимальне значення відношення частот спостерігається при $\nu = 0,5$, а мінімальне при $\nu = -1$, за максимального значення форм-фактора стрижня.

1. Mashchenko V., Krivtsov V., Kvasnikov V. Simulation of resonance oscillations of a cantilever-fixed polymer rod. *Proceedings of III International scientific and practical conference "2019: Modeling, control and information technologies"*. URL:

<http://itconfdoc.nuwm.edu.ua/index.php/ITConf/article/view/60/29>.

2. Мащенко В. А., Квасніков В. П. Методи вимірювань та автоматизовані приладові системи для визначення модулів пружності. Рівне: «Волинські береги», 2023. 196 с. 3. Mashchenko V., Krivtsov V., Kvasnikov V., Drevetskiy V., Determination of Young's dynamic modulus of polymer material by resonance vibrating-reed method. *Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska*. 2019. 4. P. 34–37. 4. Wahrhaftig A. d. M., Brasil R. M. L. R. da F. Representative experimental and computational analysis of the initial resonant frequency of largely deformed cantilevered beams. *International Journal of Solids and Structures*. 2016. 102–103. P. 44–55. 5. Li H., Liu J. Analysis of the natural characteristics of fiberreinforced cantilever beams using 8-node solid elements. *Journal of Vibroengineering*. 2025. 27. 5. P. 757–770. 6. Janchikoski A., Meireles J. F. B. Dynamic analysis of a free vibrating cantilever beam. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*. 2023. 1. 6. P. 123–142. 7. Zubov V. A. Theory of oscillations (Optimization). World Scientific Publishing Company, 1999. 412 p. 8. Ferry J. D. Viscoelastic properties of polymers. John Wiley & Sons, INC., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1980. 672 p. 9. Timoshenko S. P. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1921. 41. LXVI. P. 744–746. 10. Timoshenko S. P. On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1922. 43. X. P. 125–131. 11. Timoshenko S. P., Gere J. M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA. 1961. 544 p. 12. Shevchuk T. M., Bordyuk M. A., Mashchenko V. A. , Krivtsov V. V., Mashchenko L. V. Debye temperatures and nanostructuring of polyurethane auxetics. *Physics and Chemistry of Solid State*. 2024. 25. 2. P. 316–323.

REFERENCES:

1. Mashchenko V., Kryvtsov V., Kvasnikov V. Modelyuvannya rezonansnykh kolyvan' konsol'no zakriplenoho polimernoho stryzhnya. *Materialy III Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi «2019: Modelyuvannya*, 592



upravlinnya ta informatsiyni tekhnolohiyi». URL:
<http://itconfdoc.nuwm.edu.ua/index.php/ITConf/article/view/60/29>.

Mashchenko V. A., Kvasnikov V. p. Metody vymiryuvannya ta avtomatyzovani pryladovi systemy dlya vyznachennya moduliv pruzhnosti. Rivne: «Volyns'ki oberehy», 2023. 196 s. 3. Mashchenko V., Kryvtsov V., Kvasnikov V., Drevets'kyi V. Vyznachennya dynamichnoho modulya Yunha polimernoho materialu rezonansnym vibratsiynym metodom. Informatyka, Avtomatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska. 2019. 4. S. 34–37. 4. Varkhaftih A. d. M., Brasil R. M. L. R. da F. Predstavnyts'kyi eksperymental'nyy i obchyslyval'nyy analiz pochatkovoyi rezonansnoyi chastoty syl'no deformovanykh konsol'nykh balok. Mizhnarodnyy zhurnal tverdykh rechovin i struktur. 2016. 102–103. S. 44–55. 5. Li N., Lyu Dzh. Analiz pryrodnykh kharakterystyk fibroarmovanykh konsol'nykh balok z vykorystanniam 8-vuzlovyykh sutsil'nykh elementiv. Zhurnal vibroinzheneriyi. 2025. 27. 5. S. 757–770. 6. Janchikoski A., Meireles J. F. B. Dynamichnyy analiz vil'noyi vibratsiynoyi konsol'noyi balky. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. 2023. 1. 6. S. 123–142. 7. Zubov V. A. Teoriya kolyvan' (optyimizatsiya). World Scientific Publishing Company, 1999. 412 s. 8. Ferry J. D. Viscoelastic properties of polymers. John Wiley & Sons, INC., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1980. 672 s. 9. Timoshenko S. P. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1921. 41. LXVI. S. 744–746. 10. Timoshenko S. P. On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-section. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1922. 43. X. S. 125–131. 11. Timoshenko S. P., Gere J. M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA. 1961. 544 s. 12. Shevchuk T. M., Bordyuk M. A., Mashchenko V. A., Krivtsov V. V., Mashchenko L. V. Debye temperatures and nanostructuring of polyurethane auxetics. Physics and Chemistry of Solid State. 2024. 25. 2. S. 316–323.

Mashchenko V. A. [1; ORCID ID: 0000-0001-6968-762X],

Dr. Sc. (Tech.), Assoc. Prof.

Matus S. K. [1; ORCID ID: 0000-0002-6184-5184],

Cand. Sc. (Tech.), Assoc. Prof.

Krivtsov V. V. [2; ORCID ID: 0000-0002-8338-645X],

Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Shevchuk T. M. [2; ORCID ID: 0000-0002-8351-2161],

Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

Borduk M. A. [3; ORCID ID: 0000-0001-7693-8343],

Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.

¹ National University of Water and Environmental Engineering, Rivne,

² Rivne State Humanitarian University

³ Rivne Medical Academy

ON THE ISSUE OF DETERMINING THE MODULUS OF ELASTICITY OF A CANTILEVERED ROD BY THE RESONANCE METHOD

The purpose of the article is to review the issue of calculating corrections that take into account the finite ratio of a rod's geometric dimensions to the material's dynamic characteristics, in order to refine the natural resonant frequencies and the modulus of elasticity of structural polymer materials across the range of possible Poisson's ratio values.

For rods with a finite thickness-to-length ratio, the resonant frequencies of their oscillations will be lower than the frequencies corresponding to the solutions of the oscillation equation. Calculating the modulus using the analytical relationship requires the inclusion of an additional multiplier that determines the correction to the resonant frequency depending on the form factor, which is the ratio of thickness to length.

In previous studies of specimens made from various structural polymer materials, the thickness-to-length ratio was sufficiently low (0.023–0.025); consequently, the correction to the resonant frequency was small and did not affect the determination of the real part of the elastic modulus.

However, in cases where it is necessary to use relatively thick or short rods, in which the form factor value exceeds 0.06–0.07, incorrect calculation of the correction can introduce a significant error into the value of the elastic modulus. With form factor values ranging from 0.15 to 0.2, this error can reach 30–50%.

If a polymer material has significant mechanical losses, then the natural frequencies are somewhat different from those calculated by classical methods of elasticity theory. For polymeric structural materials, relationships have been derived to determine the real part of the complex elastic modulus and the mechanical loss tangent for cantilevered rods with rectangular and circular cross-sections. Theoretical estimates of corrections to the elastic modulus and the mechanical loss tangent were carried out within the specified frequency range. Analysis of the obtained data shows that the

correction factor for the elastic modulus did not exceed 1.12, while the correction factor for the mechanical loss tangent is at least 0.86.

For a rod with a finite thickness-to-length ratio, flexural vibrations can be described by an equation derived from the vibration equation by adding terms that account for the increase in kinetic energy and the change in point displacements resulting from flexural vibrations. The solution of the refined equation will allow us to express the resonant frequencies of the rod in terms of its density, dimensions, and elastic modulus, or, conversely, to express the elastic modulus in terms of the resonant frequencies, density, dimensions and Poisson's ratio.

An expression was obtained that relates the natural resonant frequency of the rod to the frequency corresponding to the solution of the equation of oscillations.

Theoretical estimates of the frequency ratio were performed as a function of the form factor (up to a value of 0.2) for various values of the rod material's Poisson's ratio, with the Timoshenko constant set to $2/3$.

The results obtained show that the frequency ratio increases with increasing rod form factor for all possible values of Poisson's ratio of structural polymer materials. The maximum value of the frequency ratio is observed for materials with a Poisson's ratio of 0.5 (e.g., rubber) and is equal to 1.096. For materials with a Poisson's ratio of -1 (thermoplastic polyurethane), the frequency ratio is 1.016.

For most structural polymer materials (polyethylene, polypropylene, polyvinyl chloride, polystyrene, polyethylene terephthalate), the Poisson's ratio is in the vicinity of 0.35. In this case, the maximum value of the frequency ratio, at the maximum value of the form factor, is equal to 1.084.

Keywords: resonance method, oscillation frequency, elastic modulus, tangent of the mechanical loss angle, Poisson's ratio.

Отримано: 27 січня 2026 року

Прорецензовано: 25 лютого 2026 року

Прийнято до друку: 27 березня 2026 року



© 2026 [Mashchenko V. A., Matus S. K., Krivtsov V. V., Shevchuk T. M., Borduk M. A.]. Licensee [NUWEE]. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial (CC BY-NC) license ([creativecommons.org](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)).