

УДК 519.7::532.5+556:517.9

<https://doi.org/10.31713/vt1202635>

Бомба А. Я. [1; ORCID ID: 0000-0001-5528-4192],

д.т.н., професор,

Каштан С. С. [1; ORCID ID: 0009-0002-0726-7325],

к.т.н., доцент,

¹Національний університет водного господарства та
природокористування, м.Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КЕРОВАНИХ ПОВІЛЬНИХ РУХІВ У ВОДОЙМІ

Повільні, близькі до ідеальних, керовані рухи водних мас у гідрологічних системах (водних об'єктах, наприклад, річках з притоками), обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, пропонується описувати за допомогою аналогів закону Дарсі, враховуючи як поверхневі так і підземні води, вплив яких моделюється як джерела поперечних збурень базового стоку. Методологія моделювання таких процесів базується на розвитку та адаптації числових методів комплексного аналізу, зокрема на переході від прямих задач на конформні відображення фізичної області на область комплексного потенціалу до відповідних обернених крайових задач. Це дозволяє моделювати структуру потоку; знаходити функцію течії та комплексний потенціал; розраховувати витрати, перетоки, поле швидкості; будувати гідродинамічну сітку руху; приймати рішення щодо керування водними ресурсами. Такий підхід відкриває можливість створення інтелектуальних систем прогнозування гідрологічного режиму водного об'єкту.

Ключові слова: математичне моделювання, числові методи, конформні відображення, обернені крайові задачі, закон Дарсі, керовані повільні рухи, гідрологічні системи, керування водними ресурсами, інтелектуальні системи прогнозування.

Вступ. Гідрологічні системи на сьогодні є дуже активною галуззю досліджень. Гідрологія середовища формується взаємодією між наземними, атмосферними та антропогенними системами та знаходиться під їхнім впливом. Розуміння цих зв'язків є важливим для покращення управління водними ресурсами, прогнозування



повеней, прогнозування якості води, а також управління та відновлення екосистем. До факторів, які сприяють цьому, зокрема, відносять: зростаючу в останні десятиліття мінливість, спричинену зміною гідрокліматичних умов [1]; частоту та інтенсивність екстремальних явищ, які посилюються зі зміною клімату [2]; зростаюче антропогенне навантаження на водні ресурси, що призводить до збільшення потреб у воді та енергії в глобальному масштабі [3].

Математичне моделювання надає можливість проаналізувати характер процесів, які впливають на стан гідрологічної системи, передбачити їхній розвиток у майбутньому, що є важливим під час прийняття управлінських рішень. У багатьох випадках практики формули для знаходження характеристик середовища потребують задання функції швидкості. В реальних фізичних задачах, зокрема в задачах гідрології, фільтрації, часто це зробити або неможливо, або дуже складно. Математичне моделювання гідравлічних процесів є невід'ємною частиною сучасних гідрологічних досліджень водних об'єктів та дозволяє ефективно емулювати відповідні процеси, зокрема, за допомогою сурогатних моделей на основі методів машинного навчання [4]. Визначення та вивчення домінантних процесів у межах водного об'єкту є важливим етапом дослідження, оскільки саме ці механізми здійснюють визначальний вплив на гідрологічну функцію водойми. Ідентифікація домінантних факторів дозволяє розробляти фізично адекватні моделі формування стоку, планувати управлінські втручання та розуміти, як кліматичні і ландшафтні особливості впливають на гідрологічну функцію [5].

Ефективним методом математичного моделювання процесів руху (зокрема, і фільтраційних) у криволінійних областях обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями є розроблений нами підхід на основі комплексного аналізу з використанням числових методів квазіконформних відображень. В роботах [6 – 8] побудовані алгоритми чисельного обернення розв'язків нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в одно та багатозв'язних областях, обмежених лініями течії та екіквазіпотенціальними лініями – математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок і т.ін. в однорідних і неоднорідних анізотропних середовищах. Запропонований підхід дозволяє паралельно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну витрату і поле швидкостей та

побудувати гідродинамічну сітку руху. Так, у роботах [9, 10] цей підхід застосовано при ідентифікації кривих розділу сильно контрастних однорідних ізотропних та неоднорідних анізотропних середовищ, а у роботах [11, 12] описано можливі характерні випадки формування течії, які визначаються положенням ліній розділу ділянок фільтраційних потоків залежно від значення потенціалу на додатковій еквіпотенціальній лінії.

У цій роботі продовжується започатковане у [13 – 15] вивчення зазначеної проблеми і запропоновано вплив як поверхневих так і підземних вод, що живлять основну течію (наприклад, притоки до водойми, скиди у водойму) або живляться за рахунок основної течії (наприклад, водозабірні насоси, стоки підземних/грунтових вод), на початковому етапі моделювати як ділянки (джерела) поперечних збурень базового стоку.

Математична модель процесу повільного руху у водоймі з притоками. Розглянемо водний об'єкт – водойму (зокрема, річку) з притоками, як однозв'язну криволінійну чотирикутну область G_z ($z=x+iy$), обмежену чотирма гладкими кривими $AB=\{z: f_1(x,y)=0\}$, $BC=\{z: f_2(x,y)=0\}$, $CD=\{z: f_3(x,y)=0\}$, $DA=\{z: f_4(x,y)=0\}$, які в точках A, B, C, D перетинаються під прямими кутами, за таких умов: $\varphi|_{AB}=\varphi_*$, $\varphi|_{CD}=\varphi^*$, $\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{L_n^*}=\left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{L_n^*}=0$, де $\vec{n}$ – нормаль до відповідної

кривої, $L_n^*=BC\setminus\bigcup_{k=0}^s M_{2k+1}N_{2k+1}$, $L_n^*=AD\setminus\bigcup_{k=1}^r M_{2k}N_{2k}$.

Оскільки течію вважаємо ідеальною, то, як відомо [6], швидкість руху можемо описати законами $\vec{v}=\text{grad } \varphi(x,y)$, $\text{div } \vec{v}=0$. А ділянки $M_k N_k$ впадання приток на лівому ($k=1,3,\dots,2s+1$) та правому ($k=2,\dots,2r$) берегах ототожнюються з джерелами збурень вихідного потоку водних мас вздовж граничних ліній BC та AD основної течії відповідно (рис. 1). Причому, притік до русла можна розглядати як гідравлічний, так і фільтраційний, а потенціал φ можна визначити через напір та гідравлічну провідність або коефіцієнт фільтрації відповідно (для зручності викладок вважатимемо, що ці коефіцієнти дорівнюють одиниці).

Нехай на цих ділянках (притоках) $M_k N_k$ маємо потенціали

$\varphi|_{M_k N_k}=\varphi_k^\circ$, причому $\varphi_*<\varphi_k^\circ<\varphi^*$. Залежно від їхніх значень та

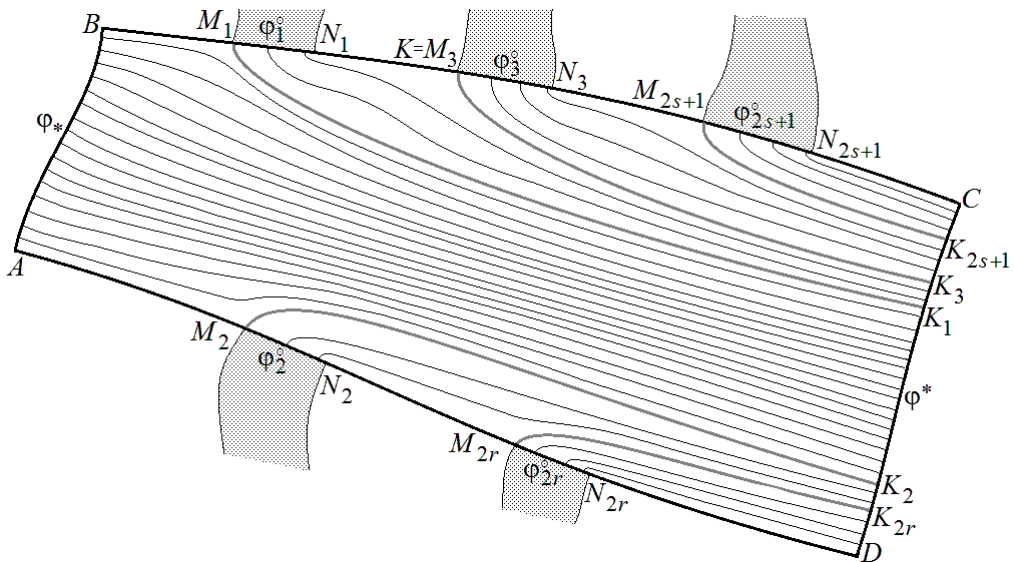


Рис. 1. Фізична область G_z – водойма з притоками

співвідношень між ними можливі різні випадки формування структури течії у фізичній області G_z (водному об'єкті), які, зокрема, характеризуються положенням ліній розділу ділянок потоків водних мас, що при цьому утворюються. Аналогічно до [6, 11 – 15], задача полягає у знаходженні характеристичної функції течії, що забезпечує можливість паралельного знаходження комплексного потенціалу, повної витрати потоку, величин різних перетоків, побудови у розглядуваній області гідродинамічної сітки руху та кривих розділу водних мас, розрахунку поля швидкості руху.

Розглянемо один з можливих випадків [15] формування структури течії у водному об'єкті – області G_z , а саме випадок, коли відсутні перетоки з джерел (приток) $M_k N_k$ проти основного потоку водних мас. Називатимемо такий випадок – ключовим. При цьому, співвідношення між потенціалами задовольняють нерівностям $\varphi_* < \varphi_1^\circ < \varphi_3^\circ < \varphi_{2s+1}^\circ < \varphi^*$ та $\varphi_* < \varphi_2^\circ < \varphi_{2r}^\circ < \varphi^*$, а область комплексного потенціалу G_ω матиме вигляд, наведений на рис.2.

Отже, розглянемо модельну задачу знаходження гармонічної функції (потенціалу швидкостей $\varphi = \varphi(x, y)$) у скінченій однозв'язній криволінійній області – водному об'єкті (річці з притоками). Отже, розглянемо модельну задачу знаходження гармонічної функції (потенціалу швидкостей $\varphi = \varphi(x, y)$) у скінченій однозв'язній

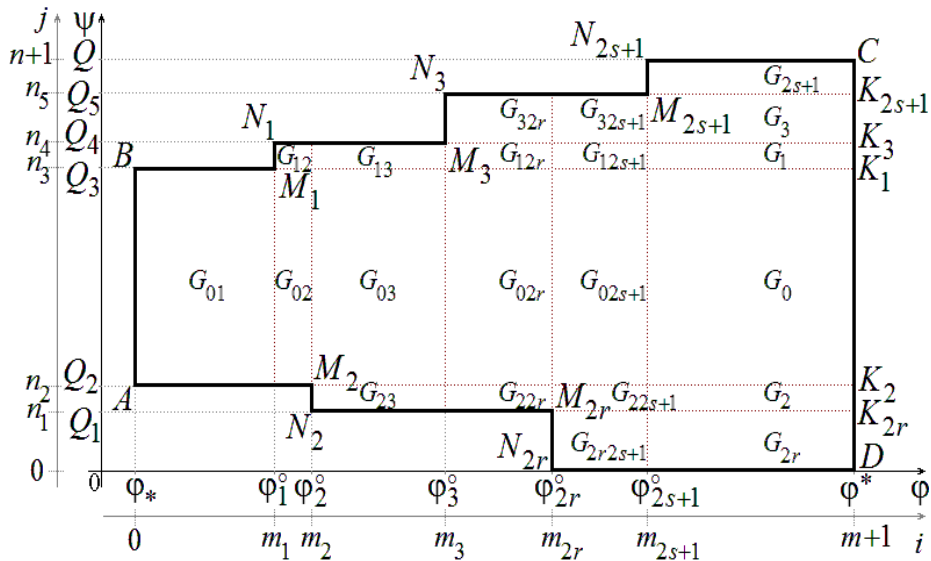


Рис. 2. Область комплексного потенціалу G_{ω} та параметри її апроксимації

криволінійній області – водному об'єкті (річці з притоками) $G_z = ABM_1N_1M_3N_3M_{2s+1}N_{2s+1}CDN_{2r}M_{2r}N_2M_2$ ($z=x+iy$)

за таких умов: $\varphi|_{f_1(x,y)=0}=\varphi_*$, $\varphi|_{f_3(x,y)=0}=\varphi^*$, $\varphi|_{M_k N_k}=\varphi_k^\circ$,
 $\varphi_* < \varphi_2^\circ < \varphi_{2r}^\circ < \varphi^*$, $\varphi_* < \varphi_1^\circ < \varphi_3^\circ < \varphi_{2s+1}^\circ < \varphi^*$ (причому φ_k° – керувальні
 потенціали, ділянки (притоки) $M_k N_k$ – носії керувального
 потенціалу),

$$\left. \frac{d\phi}{dn} \right|_{BM_1} = \left. \frac{d\phi}{dn} \right|_{N_1 M_3} = \left. \frac{d\phi}{dn} \right|_{N_3 M_{2s+1}} = \left. \frac{d\phi}{dn} \right|_{N_{2s+1} C} = \left. \frac{d\phi}{dn} \right|_{D N_{2r}} = \left. \frac{d\phi}{dn} \right|_{M_{2r} N_2} = \left. \frac{d\phi}{dn} \right|_{M_2 A} = 0.$$

Числові методи комплексного аналізу. За допомогою введення гармонічної функції $\psi = \psi(x, y)$ (функції течії), комплексно спряженої до $\varphi = \varphi(x, y)$, та заміни останніх семи граничних умов на умови $\psi|_{BM_1} = Q_3$, $\psi|_{N_1M_3} = Q_4$, $\psi|_{N_3M_{2s+1}} = Q_5$, $\psi|_{N_{2s+1}C} = Q$, $\psi|_{DN_{2r}} = 0$, $\psi|_{M_{2r}N_2} = Q_1$, $\psi|_{M_2A} = Q_2$, де $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q$ – величини потоків водних мас (невідомі параметри), цю задачу замінимо більш загальною задачею на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $\bar{G}_\omega = \bar{G}_{01} U \bar{G}_{12} U \bar{G}_{02} U \bar{G}_{13} U$



$\cup \bar{G}_{03} \cup \bar{G}_{23} \cup \bar{G}_{32r} \cup \bar{G}_{12r} \cup \bar{G}_{02r} \cup \bar{G}_{22r} \cup \bar{G}_{32s+1} \cup \bar{G}_{12s+1} \cup \bar{G}_{02s+1} \cup \bar{G}_{22s+1} \cup$
 $\cup \bar{G}_{2r2s+1} \cup \bar{G}_{2s+1} \cup \bar{G}_3 \cup \bar{G}_1 \cup \bar{G}_0 \cup \bar{G}_2 \cup \bar{G}_{2r}$ (див. рис. 2), або на обернене
 конформне відображення $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$ ($G_\omega \rightarrow G_z$) за
 відповідності кутових точок з паралельним відшукуванням невідомих
 параметрів, витрат-перетоків (див., наприклад, [6, 11, 12, 15 – 17]).
 Коректність постановок таких задач (згідно з відомою теоремою
 Рімана про конформні відображення [17]) аналогічно до [6, 15]
 забезпечується вимогами відповідності граничних точок вихідної
 фізичної області і відповідної області комплексного потенціалу та
 знаходженням під час їхнього розв'язання ще й $q-3$ параметрів (q –
 кількість відмічених точок на кожній граничній лінії).

Відповідну обернену нелінійну крайову задачу на конформне
 відображення області G_ω на область G_z для невідомих
 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q$ у диференціальній формі запишемо у вигляді [6,
 11, 12, 15]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_2 \leq \psi \leq Q_3, \\ f_2(x(\varphi, Q_3), y(\varphi, Q_3)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_1^\circ, \\ f_2(x(\varphi_1^\circ, \psi), y(\varphi_1^\circ, \psi)) = 0, \quad Q_3 \leq \psi \leq Q_4, \\ f_2(x(\varphi, Q_4), y(\varphi, Q_4)) = 0, \quad \varphi_1^\circ \leq \varphi \leq \varphi_3^\circ, \\ f_2(x(\varphi_3^\circ, \psi), y(\varphi_3^\circ, \psi)) = 0, \quad Q_4 \leq \psi \leq Q_5, \\ f_2(x(\varphi, Q_5), y(\varphi, Q_5)) = 0, \quad \varphi_3^\circ \leq \varphi \leq \varphi_{2s+1}^\circ, \\ f_2(x(\varphi_{2s+1}^\circ, \psi), y(\varphi_{2s+1}^\circ, \psi)) = 0, \quad Q_5 \leq \psi \leq Q, \\ f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_{2s+1}^\circ \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad Q \geq \psi \geq 0, \\ f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi^* \geq \varphi \geq \varphi_{2r}^\circ, \\ f_4(x(\varphi_{2r}^\circ, \psi), y(\varphi_{2r}^\circ, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1, \\ f_4(x(\varphi, Q_1), y(\varphi, Q_1)) = 0, \quad \varphi_{2r}^\circ \geq \varphi \geq \varphi_2^\circ, \\ f_4(x(\varphi_2^\circ, \psi), y(\varphi_2^\circ, \psi)) = 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2, \\ f_4(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_2^\circ \geq \varphi \geq \varphi_*, \end{array} \right. \quad (2)$$

де Q – сумарний потік, що виходить із області G_z через ділянку границі CD , а $Q_1, Q_2-Q_1, Q_3-Q_2, Q_4-Q_3, Q_5-Q_4, Q-Q_5$ – величини потоків, що входять в область G_z через ділянки $M_{2r}N_{2r}, M_2N_2, AB, M_1N_1, M_3N_3, M_{2s+1}N_{2s+1}$ відповідно.

Задачу (1), (2) зведемо до задачі відшукування розв'язку рівнянь Лапласа в області G_ω за нелінійних крайових умов (2) та умов Коші–Рімана (1) на границі області G_ω .

Для числової побудови відображення області G_ω на фізичну область G_z різницевий аналог цієї задачі (1), (2) у відповідній

нерівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \bigcup_{l=1}^{21} G_\omega^{(l)}$, $G_\omega^{(l)} = \langle \varphi_l, \psi_j \rangle$:

$$\varphi_i = \Phi_1 + \Delta\varphi_l(i-a_1), \quad i = \overline{a_1, a_2}; \quad \psi_j = \Psi_1 + \Delta\psi_l(j-b_1), \quad j = \overline{b_1, b_2}; \quad \Delta\varphi_l = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{a_2 - a_1},$$

$$\Delta\psi_l = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{b_2 - b_1}, \quad \gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi_l} \quad \left\{ \text{див. рис. 2} \right\} \text{ параметри якої визначаються за}$$

номерами l її підобластей $G_\omega^{(l)}$ з табл. 1, запишемо у такому вигляді [18]:

Таблица 1.

Значення параметрів підобластей $G_\omega^{(l)}$ сіткової області G_ω^γ

l	$G_\omega^{(l)}$	Φ_1	Φ_2	a_1	a_2	Ψ_1	Ψ_2	b_1	b_2
1	G_{01}	Φ_*	Φ_1°	0	m_1	Q_2	Q_3	n_2	n_3
2	G_{12}	Φ_1°	Φ_2°	m_1	m_2	Q_3	Q_4	n_3	n_4
3	G_{02}	Φ_1°	Φ_2°	m_1	m_2	Q_2	Q_3	n_2	n_3
4	G_{13}	Φ_2°	Φ_3°	m_2	m_3	Q_3	Q_4	n_3	n_4
5	G_{03}	Φ_2°	Φ_3°	m_2	m_3	Q_2	Q_3	n_2	n_3
6	G_{23}	Φ_2°	Φ_3°	m_2	m_3	Q_1	Q_2	n_1	n_2
7	G_{32r}	Φ_3°	Φ_{2r}°	m_3	m_{2r}	Q_4	Q_5	n_4	n_5
8	G_{12r}	Φ_3°	Φ_{2r}°	m_3	m_{2r}	Q_3	Q_4	n_3	n_4
9	G_{02r}	Φ_3°	Φ_{2r}°	m_3	m_{2r}	Q_2	Q_3	n_2	n_3
10	G_{22r}	Φ_3°	Φ_{2r}°	m_3	m_{2r}	Q_1	Q_2	n_1	n_2
11	G_{32s+1}	Φ_{2r}°	Φ_{2s+1}°	m_{2r}	m_{2s+1}	Q_4	Q_5	n_4	n_5



12	G_{12s+1}	φ_{2r}°	φ_{2s+1}°	m_{2r}	m_{2s+1}	Q_3	Q_4	n_3	n_4
13	G_{02s+1}	φ_{2r}°	φ_{2s+1}°	m_{2r}	m_{2s+1}	Q_2	Q_3	n_2	n_3
14	G_{22s+1}	φ_{2r}°	φ_{2s+1}°	m_{2r}	m_{2s+1}	Q_1	Q_2	n_1	n_2
15	G_{2r2s+1}	φ_{2r}°	φ_{2s+1}°	m_{2r}	m_{2s+1}	0	Q_1	0	n_1
16	G_{2s+1}	φ_{2s+1}°	φ^*	m_{2s+1}	$m+1$	Q_5	Q	n_5	$n+1$
17	G_3	φ_{2s+1}°	φ^*	m_{2s+1}	$m+1$	Q_4	Q_5	n_4	n_5
18	G_1	φ_{2s+1}°	φ^*	m_{2s+1}	$m+1$	Q_3	Q_4	n_3	n_4
19	G_0	φ_{2s+1}°	φ^*	m_{2s+1}	$m+1$	Q_2	Q_3	n_2	n_3
20	G_2	φ_{2s+1}°	φ^*	m_{2s+1}	$m+1$	Q_1	Q_2	n_1	n_2
21	G_{2r}	φ_{2s+1}°	φ^*	m_{2s+1}	$m+1$	0	Q_1	0	n_1

– різницеві аналоги рівнянь Лапласа, апроксимовані у нерівномірній сітковій області G_ω^γ за шаблоном “хрест” – п’ятиточковою різницевою схемою:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}} \left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i,j}}{\varphi_{i+1}-\varphi_i} - \frac{x_{i,j}-x_{i-1,j}}{\varphi_i-\varphi_{i-1}} \right) + \frac{2}{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}} \left(\frac{x_{i,j+1}-x_{i,j}}{\psi_{j+1}-\psi_j} - \frac{x_{i,j}-x_{i,j-1}}{\psi_j-\psi_{j-1}} \right) = 0, \\ & \frac{2}{\varphi_{i+1}-\varphi_{i-1}} \left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i,j}}{\varphi_{i+1}-\varphi_i} - \frac{y_{i,j}-y_{i-1,j}}{\varphi_i-\varphi_{i-1}} \right) + \frac{2}{\psi_{j+1}-\psi_{j-1}} \left(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j}}{\psi_{j+1}-\psi_j} - \frac{y_{i,j}-y_{i,j-1}}{\psi_j-\psi_{j-1}} \right) = 0, \\ & \forall (\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma; \end{aligned} \quad (3)$$

– різницеві аналоги крайових умов (2), апроксимовані у G_ω^γ за точковими рівняннями:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{n_2, n_3}, \\
 &f_2(x_{i,n_3}, y_{i,n_3}) = 0, \quad i = \overline{0, m_1}, \\
 &f_2(x_{m_1,j}, y_{m_1,j}) = 0, \quad j = \overline{n_3, n_4}, \\
 &f_2(x_{i,n_4}, y_{i,n_4}) = 0, \quad i = \overline{m_1, m_3}, \\
 &f_2(x_{m_3,j}, y_{m_3,j}) = 0, \quad j = \overline{n_4, n_5}, \\
 &f_2(x_{i,n_5}, y_{i,n_5}) = 0, \quad i = \overline{m_3, m_{2s+1}}, \\
 &f_2(x_{m_{2s+1},j}, y_{m_{2s+1},j}) = 0, \quad j = \overline{n_5, n+1}, \\
 &f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) = 0, \quad i = \overline{m_{2s+1}, m+1}, \\
 &f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\
 &f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad i = \overline{m_{2r}, m+1}, \\
 &f_4(x_{m_{2r},j}, y_{m_{2r},j}) = 0, \quad j = \overline{0, n_1}, \\
 &f_4(x_{i,n_1}, y_{i,n_1}) = 0, \quad i = \overline{m_2, m_{2r}}, \\
 &f_4(x_{m_2,j}, y_{m_2,j}) = 0, \quad j = \overline{n_1, n_2}, \\
 &f_4(x_{i,n_2}, y_{i,n_2}) = 0, \quad i = \overline{0, m_2};
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

– різницеві аналоги приграничних умов ортогональності (додаткові умови для граничних та приграничних вузлів), якими апроксимовано умови Коші–Рімана на границі області комплексного потенціалу за точково-різницеvими рівняннями:



$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1x}'(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f_{1y}'(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) = 0, \quad j = \overline{n_2, n_3}, \\ f_{2x}'(x_{i,n_3}, y_{i,n_3})(y_{i,n_3} - y_{i,n_3-1}) - f_{2y}'(x_{i,n_3}, y_{i,n_3})(x_{i,n_3} - x_{i,n_3-1}) = 0, \quad i = \overline{0, m_1}, \\ f_{2x}'(x_{m_1,j}, y_{m_1,j})(y_{m_1+1,j} - y_{m_1,j}) - \\ - f_{2y}'(x_{m_1,j}, y_{m_1,j})(x_{m_1+1,j} - x_{m_1,j}) = 0, \quad j = \overline{n_3, n_4}, \\ f_{2x}'(x_{i,n_4}, y_{i,n_4})(y_{i,n_4} - y_{i,n_4-1}) - f_{2y}'(x_{i,n_4}, y_{i,n_4})(x_{i,n_4} - x_{i,n_4-1}) = 0, \quad i = \overline{m_1, m_3}, \\ f_{2x}'(x_{m_3,j}, y_{m_3,j})(y_{m_3+1,j} - y_{m_3,j}) - \\ - f_{2y}'(x_{m_3,j}, y_{m_3,j})(x_{m_3+1,j} - x_{m_3,j}) = 0, \quad j = \overline{n_4, n_5}, \\ f_{2x}'(x_{i,n_5}, y_{i,n_5})(y_{i,n_5} - y_{i,n_5-1}) - f_{2y}'(x_{i,n_5}, y_{i,n_5})(x_{i,n_5} - x_{i,n_5-1}) = 0, \quad i = \overline{m_3, m_{2s+1}}, \\ f_{2x}'(x_{m_{2s+1},j}, y_{m_{2s+1},j})(y_{m_{2s+1}+1,j} - y_{m_{2s+1},j}) - \\ - f_{2y}'(x_{m_{2s+1},j}, y_{m_{2s+1},j})(x_{m_{2s+1}+1,j} - x_{m_{2s+1},j}) = 0, \quad j = \overline{n_5, n+1}, \\ f_{2x}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n+1} - y_{i,n}) - f_{2y}'(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n+1} - x_{i,n}) = 0, \quad i = \overline{m_{2s+1}, m+1}, \\ f_{3x}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m+1,j} - y_{m,j}) - f_{3y}'(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m+1,j} - x_{m,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1}, \\ f_{4x}'(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,0} - y_{i,1}) - f_{4y}'(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,0} - x_{i,1}) = 0, \quad i = \overline{m_{2r}, m+1}, \\ f_{4x}'(x_{m_{2r},j}, y_{m_{2r},j})(y_{m_{2r}+1,j} - y_{m_{2r},j}) - \\ - f_{4y}'(x_{m_{2r},j}, y_{m_{2r},j})(x_{m_{2r}+1,j} - x_{m_{2r},j}) = 0, \quad j = \overline{0, n_1}, \\ f_{4x}'(x_{i,n_1}, y_{i,n_1})(y_{i,n_1+1} - y_{i,n_1}) - f_{4y}'(x_{i,n_1}, y_{i,n_1})(x_{i,n_1+1} - x_{i,n_1}) = 0, \quad i = \overline{m_2, m_{2r}}, \\ f_{4x}'(x_{m_2,j}, y_{m_2,j})(y_{m_2+1,j} - y_{m_2,j}) - \\ - f_{4y}'(x_{m_2,j}, y_{m_2,j})(x_{m_2+1,j} - x_{m_2,j}) = 0, \quad j = \overline{n_1, n_2}, \\ f_{4x}'(x_{i,n_2}, y_{i,n_2})(y_{i,n_2+1} - y_{i,n_2}) - f_{4y}'(x_{i,n_2}, y_{i,n_2})(x_{i,n_2+1} - x_{i,n_2}) = 0, \quad i = \overline{0, m_{2s+1}} \end{array} \right.$$

(5)

Оскільки потоки $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q$ є невідомими параметрами, то і конформні інваріанти γ_l ($l=\overline{1,21}$) також будуть невідомими. Формули для знаходження цих величин одержимо на підставі умови "конформної подібності в малому" відповідних чотирикутників (прямокутників) двох підобластей [6, 11, 12, 15]:

$$\gamma_l = \frac{1}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)} \sum_{i=a_1}^{a_2-1} \sum_{j=b_1}^{b_2-1} \gamma_{li,j}, \quad (6)$$

$$\gamma_{li,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

Тут $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ та $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$.

Алгоритм числового розв'язання. Наближений розв'язок поставленої задачі можна отримати за допомогою алгоритму, побудованого на основі [6, 11, 12, 15], який полягає у поетапній параметризації величин конформних інваріантів, граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z з використанням ідей методів блочної ітерації [19] та Зейделя:

- 1) задаємо границю фізичної області G_z – функції $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, $f_4(x, y)$ та координати точок M_k та N_k на лівому ($k=1, 3, \dots, 2s+1$) та правому ($k=2, \dots, 2r$) берегах;
- 2) задаємо параметри розбиття сіткової області G_ω^γ (згідно з табл.1); параметр ε , що характеризує точність роботи алгоритму; значення потенціалів φ_*, φ^* ; визначаємо крок

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1};$$

- 3) задаємо початкові наближення координат граничних вузлів у такий спосіб, щоб виконувались умови (4) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів;
- 4) за формулою (6) знаходимо початкові наближення $\gamma_l^{(0)} = \gamma_l(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ невідомих конформних інваріантів γ_l ($l=\overline{1,21}$);
- 5) визначаємо кроки розбиття $\Delta\varphi_l$ та $\Delta\psi_l$ області G_ω^γ , використовуючи відповідні наближення конформних інваріантів γ_l ($l=\overline{1,21}$);



6) використовуючи ідеї методу Зейделя, уточнюємо координати внутрішніх вузлів за формулами (3) з паралельним перерахунком конформних інваріантів γ_l за формулою (6) та відповідним уточненням кроків розбиття $\Delta\varphi_l$ та $\Delta\psi_l$ ($l=\overline{1,21}$);

7) на k -му кроці ітерації знаходимо нові наближення невідомих величин за формулами $Q_1^{(k+1)} = n_1 \Delta\psi_{15}$,

$$Q_2^{(k+1)} = Q_1^{(k+1)} + (n_2 - n_1) \Delta\psi_6, \quad Q_3^{(k+1)} = Q_2^{(k+1)} + (n_3 - n_2) \Delta\psi_1,$$

$$Q_4^{(k+1)} = Q_3^{(k+1)} + (n_4 - n_3) \Delta\psi_2, \quad Q_5^{(k+1)} = Q_4^{(k+1)} + (n_5 - n_4) \Delta\psi_7,$$

$$Q^{(k+1)} = Q_5^{(k+1)} + (n+1 - n_5) \Delta\psi_{16};$$

8) уточнюємо координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь (4), (5);

9) за формулою

$$D^{(k+1)} = \frac{1}{21} \sum_{l=1}^{21} \frac{\sum_{i=a_1}^{a_2-1} \sum_{j=b_1}^{b_2-1} \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k+1)}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k+1)}\right)^2}}{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}$$

визначаємо усереднене відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області G_z^γ ;

10) перевіряємо виконання умов:

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \quad |D^{(k+1)} - D^{(k)}| < \varepsilon,$$

$$|Q_1^{(k+1)} - Q_1^{(k)}| < \varepsilon, \quad |Q_2^{(k+1)} - Q_2^{(k)}| < \varepsilon, \quad |Q_3^{(k+1)} - Q_3^{(k)}| < \varepsilon,$$

$$|Q_4^{(k+1)} - Q_4^{(k)}| < \varepsilon, \quad |Q_5^{(k+1)} - Q_5^{(k)}| < \varepsilon, \quad |Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon;$$

11) якщо умови п.10 не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів – п.6;

12) якщо ж умови п.10 виконуються, то обчислюємо нев'язку конформності отриманої сітки за формулою $\varepsilon_k = |1 - D^{(k+1)}|$ та будуємо гідродинамічну сітку руху, знаходимо розрахункові значення керувальних потенціалів ϕ_k° , характеристичну функцію течії, комплексний потенціал, величини перетоків, інші параметри процесу.

Визначені в результаті розрахунків цієї задачі значення керувальних потенціалів $\varphi_k^\circ = \varphi_k^\bullet$ мають властивість оптимальності, що є визначальним фактором для адекватного відтворення гідродинамічних процесів. Використання цих потенціалів у межах математичної моделі дозволяє не лише генерувати, а й детально аналізувати різноманітні сценарії формування кінематичної структури течії безпосередньо у розрахунковій фізичній області G_z (водному об'єкті). Основним індикатором стану гідросистеми є положення ліній розділу потоків, що утворюються під час руху водних мас. Ці лінії розмежовують зони впливу різних гідродинамічних факторів (джерел збурень $M_k N_k$) і формуються в залежності від значень потенціалів φ_k° та співвідношень між ними і оптимальними (ключовими) потенціалами $\varphi_k^\bullet$.

Зокрема, за умови $\varphi_k^\circ < \varphi_k^\bullet$ матимемо випадки перетоку водних мас із джерел (приток) $M_k N_k$ назустріч основному потоку. Це свідчить про домінування вхідних локальних потоків за певних параметрів керування (зокрема, значень керувальних потенціалів φ_k°). Натомість, якщо ж $\varphi_k^\circ > \varphi_k^\bullet$, то матимемо зворотний процес – перетік основного потоку водних мас в бік (безпосередньо до) джерел (приток) $M_k N_k$. Такий підхід до моделювання дозволяє прогнозувати (розраховувати) зони змішування водних мас та оцінювати стійкість гідродинамічного режиму водойми при зміні керувальних впливів; дозволяє ефективно емулювати відповідні гідравлічні процеси за допомогою синтезу математичних моделей та методів машинного навчання.

Висновки. На основі модифікованого числового методу комплексного аналізу розв'язання конкретних типів задач на конформні відображення L -подібних областей комплексного потенціалу на відповідні фізичні області з криволінійними ділянками границі (лініями течії та еквіпотенціальними лініями), побудовано алгоритм, що забезпечує можливість знаходити потенціали, а отже і поля швидкості руху, будувати лінії розділу течії та гідродинамічну сітку руху, обчислювати різні інтегральні параметри (перетоки, витрати тощо), передбачати наслідки певних видів катастроф (зокрема, підтоплень). Розроблений підхід також дозволяє ширше аналізувати гідрологічні процеси, планувати водогосподарську та гідротехнічну інфраструктуру, прогнозувати ризики та приймати

відповідні обґрунтовані рішення щодо водокористування, управління водними системами та захисту екосистеми водного об'єкту. У перспективі – узагальнення запропонованих підходів до вивчення більш глобальних процесів руху вод у неоднорідних, анізотропних, схильних до деформацій середовищах, зокрема, басейнах річок та морів з урахуванням взаємодії підземних ґрунтових вод і поверхневих водних мас та їхніх забруднень.

1. Sreeparvathy V., Srinivas V.V. Global assessment of spatiotemporal variability of wet, normal and dry conditions using multiscale entropy-based approach. *Scientific Reports*. 2022. Volume 12, Issue 1. Article 9767. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-022-13830-w>. **2.** Stevenson S., Coats S., Touma D., Cole J., Lehner F., Fasullo J., Otto-Bliesner B. Twenty-first century hydroclimate: A continually changing baseline, with more frequent extremes. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2022. Volume 119, Issue 12. Article e2108124119. URL: <https://doi.org/10.1073/pnas.2108124119>. **3.** Boretti A., Rosa L. Reassessing the projections of the World Water Development Report. *npj Clean Water*. 2019. Volume 2. Article 15. URL: <https://doi.org/10.1038/s41545-019-0039-9>. **4.** Huang R., Ma C., Ma J., Huangfu X., He Q. Machine learning in natural and engineered water systems. *Water Research*. 2021. Volume 205. Article 117666. URL: <https://doi.org/10.1016/j.watres.2021.117666>. **5.** McMillan H.K., Gnann S.J., Araki R. Large Scale Evaluation of Relationships Between Hydrologic Signatures and Processes. *Water Resources Research*. 2022. Volume 58, Issue 6. Article e2021WR031751. URL: <https://doi.org/10.1029/2021WR031751>. **6.** Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярошак С.В. Методи комплексного аналізу. Рівне: НУВГП, 2013. 415с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/2803>. **7.** Бомба А.Я., Каштан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах. *Вісник Київського університету. Сер. фізико-математичні науки*. 2001. №4. С.182-195. **8.** Bomba A.Y., Kashtan S.S. On One Method for Constructing a Dynamical Mesh of Nonlinear Quasiperfect Processes in Deformable Anisotropic Media. *Journal of Applied Computer Science*. 2005. Volume 12, №2. P.7-21. URL: <https://yadda.icm.edu.pl/baztech/element/bwmata1.element.baztech-article-LOD7-0027-0077>. **9.** Бомба А.Я., Каштан С.С. Ідентифікація кривих розділу сильно контрастних середовищ методами комплексного аналізу. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2023. № 1. С. 17-22. URL: <https://doi.org/10.20998/2222-0631.2023.01.03>. **10.** Бомба А.Я., Каштан С.С. Ідентифікація кривих розділу сильно контрастних неоднорідно

анізотропних середовищ методами комплексного аналізу. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки*. 2023. № 3 (103). С. 91-102. URL: <https://doi.org/10.31713/vt320239>. **11.** Бомба А.Я., Каштан С.С. Нелінійні обернення крайових задач на конформні відображення з потенціалом керування. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2002. Том 45, №3. С. 69-76. URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2925>. **12.** Bomba A.Y., Kashtan S.S., Skopetskii V.V. Nonlinear Inverse Boundary-Value Problems of Conformal Mapping with a Controlling Potential. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2004. Volume 40, Issue 1. P.58-65. URL: <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000028100.70341.57>. **13.** Бомба А.Я., Каштан С.С. Математичне моделювання одного класу підземних і поверхневих гідравлічних процесів. *Моделювання, керування та інформаційні технології (MCIT-2024): матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції (7-9 листопада 2024 р., м.Рівне)*. Рівне: НУВГП, 2024. С. 284-287. URL: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.087>. **14.** Бомба А.Я., Каштан С.С. Математичне моделювання та прогнозування керованих рухів поверхневих та підземних вод. *Моделювання, керування та інформаційні технології (MCIT-2025): матеріали VIII Міжнародної науково-практичної конференції (6-8 листопада 2025 р., м.Рівне)*. Рівне: НУВГП, 2025. С. 295-298. URL: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.092>. **15.** Бомба А.Я., Каштан С.С. Методи комплексного аналізу прогнозування керованих рухів поверхневих та фільтраційних вод. *Кібернетика та системний аналіз*. 2025. Т.61, №5. С.39-54. URL: <https://doi.org/10.34229/KCA2522-9664.25.5.4>. **16.** Polubarinova-Kochina P.Y. Theory of ground water movement. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1962. 613 p. URL: [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(63\)90025-8](https://doi.org/10.1016/0022-1694(63)90025-8). **17.** Lawrentjew M.A., Schabat B.W. Methoden der komplexen Funktionentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967. 846 s. URL: <https://doi.org/10.1002/zamm.19680480222>. **18.** Samarskii A.A. The theory of difference schemes. Boca Raton: CRC Press, 2001. 761 p. URL: <https://doi.org/10.1201/9780203908518>. **19.** Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York, London: Academic Press, 1970. 555 p. URL: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11263-9>.

REFERENCES:

1. Sriparvati V., Srinivas V.V. Hlobal'na otsinka prostorovo-chasovoyi minlyvosti volohykh, normal'nykh ta sukhlykh umov z vykorystanniam bahatomasshtabnoho pidkhotu na osnovi entropiyi. *Naukovi zvity*. 2022. Tom 12, Vypusk 1. Statyya 9767. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-022-13830-w>. 2. Stivenson S., Kout-s S., Touma D., Koul Dzh., Lener F., Fasullo Dzh., Otto-Blisner B. Hidroklimat KHKHI stolittya: postiyno minlyva bazova liniya z

chastishymy ekstremumamy. Pratsi Natsional'noyi akademiyi nauk. 2022. Tom 119, Vypusk 12. Stat'ya e2108124119. URL: <https://doi.org/10.1073/pnas.2108124119>. 3. Boretti A., Roza L. Pereotsinka prohnosiv Zvitu pro rozvytok vodnykh resursiv svitu. npj Clean Water. 2019. Tom 2. Stat'ya 15. URL: <https://doi.org/10.1038/s41545-019-0039-9>. 4. Khuan R., Ma K., Ma Dzh., Khuanfu KH., Khe K. Mashynne navchannya v pryrodnykh ta shtuchnykh vodnykh systemakh. WaterResearch. 2021. Tom 205. Stat'ya 117666. URL: <https://doi.org/10.1016/j.watres.2021.117666>. 5. Makmillan KH.K., Hnann S.Dzh., Araki R. Masshtabna otsinka vzayemozv'yazkiv mizh hidrolohichnymy syhnaturamy ta protsesamy. Water Research. 2022. Tom 58, vypusk 6. Stat'ya e2021WR031751. URL: <https://doi.org/10.1029/2021WR031751>. 6. Bomba A.YA., Kashtan S.S., Pryhornyts'kyi D.O., Yaroshchak S.V. Metod kompleksnoho analizu. Rivne: NUVHP, 2013. 415s. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/2803>. 7. Bomba A.YA., Kashtan S.S. Neliniyni obernennya krayovykh zadach na kvazikonformni vidobrazhennya u vizotropnykh seredovyschakh. Visnyk Kyivsk'oho universytetu. Ser. fizyko-matematychni nauky. 2001. №4. S.182-195. 8. Bomba A. Y., Kashtan S. S. Pro odyin metod pobudovy dynamichnoyi sitky neliniynykh kvazidoskonalykh protsesiv u deformivnykh anizotropnykh seredovyschakh. Zhurnal prykladnoyi informatyky. 2005. Tom 12, №2. S.7-21. URL: <https://yadda.icm.edu.pl/baztech/element/bwmeta1.element.baztech-article-LOD7-0027-0077>. 9. Bomba A.YA., Kashtan S.S. Identyfikatsiya kryvykh rozdilu syl'no kontrastnykh seredovysch kompleksnymy analitychnymy metodamy. Natsional'nyi tekhnichnyi pidrozdil «HPT». Seriya: Matematika, zmodel'ovana tekhnolohiyeyu. 2023. № 1. S. 17-22. URL: <https://doi.org/10.20998/2222-0631.2023.01.03>. 10. Bomba A.YA., Kashtan S.S. Identyforidno nizotropnykh seredovysch metodamy kompleksnoho nalizu. Visnyk Natsional'noho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannya. Seriya: Tekhnichni nauky. 2023. № 3 (103). S. 91-102. URL: <https://doi.org/10.31713/vt320239>. 11. Bomba A.YA., Kashtan S.S. Neliniyni konformni vidobrazhennya z potentsialom keruvannya. Matematychni metody fizyko-mekhanichni. 2002. Tom 45, № 3. S. 69-76. URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMMPF/article/view/2925>. 12. Bomba A.Y., Kashtan S.S., Skopets'kyi V.V. Neliniyni oberneni krayovi zadachi konformnoho vidobrazhennya z keruyuchym potentsialom. Kibernetika ta systemnyy analiz. 2004. Tom 40, Vypusk 1. S.58-65. URL: <https://doi.org/10.1023/B:CASA.0000028100.70341.57>. 13. Bomba A.YA., Kashtan S.S. Matematychno modelyuyet'sya odnym klasom ditey i kerivnykiv hidravlichnykh protsesiv. Modeled, keruvannya ta informatsiyi tekhnolohiyi (MCIT-2024): materialy VII Mizhnarodnoyi naukovopraktychnoyi konferentsiyi (7-9 lystopada 2024 r., m.Rivne). Rivne: NUVHP, 2024. S. 284-287. URL: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2024.087>. 14. Bomba A.YA., Kashtan S.S.

Mathematically modeled and concipiran kerovanikh rukhv poverkhnevykh ta pidzemnykh vod. Modelyuvannya, keruvannya ta informatsiyni tekhnolohiyi (MCIT-2025): materialy VIII Mizhnarodnoyi naukovo-praktychnoyi konferentsiyi (6-8 lystopada 2025 r., m.Rivne). Rivne: NUVHP, 2025. S. 295-298. URL: <https://doi.org/10.31713/MCIT.2025.092>. 15. Bomba A.YA., Kashtan S.S. Metod kompleksnoho analizu preparatu kerovanykh rukhiv poverkhnevykh ta fil'tratsiynykh vod. Kibernetika – tse analitychna systema. 2025. T.61, №5. С.39-54. URL: <https://doi.org/10.34229/KCA2522-9664.25.5.4>. 16. Polubarynova-Kochyna P.Y. Teoriya rukhu pidzemnykh vod. Prinston, N'yu-Dzhersi: Princeton University Press, 1962. 613 s. URL: [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(63\)90025-8](https://doi.org/10.1016/0022-1694(63)90025-8). 17. Lavrent'yev M.A., Shabat B.V. Methoden der komplexes Funktionentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967. 846 s. URL: <https://doi.org/10.1002/zamm.19680480222>. 18. Samars'kyy A.A. Teoriya riznytsevykh skhem. Boka-Raton: CRC Press, 2001. 761 s. URL: <https://doi.org/10.1201/9780203908518>. 19. Orteha Dzh. M., Reynbol'dt V. K. Iterativne rozv'yazannya neliniynykh rivnyan' z kil'koma zminnymy. N'yu-York, London: Academic Press, 1970. 555 s. URL: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11263-9>.

Bomba A. Y. [1; ORCID ID: 0000-0001-5528-4192],

Doctor of Engineering, Professor,

Kashtan S. S. [1; ORCID ID: 0009-0002-0726-7325],

Candidate of Engineering, Associate Professor,

¹National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

MATHEMATICAL MODELING OF CONTROLLED SLOW FLOWS IN A WATER BODY

Slow, near-ideal, controlled flows of water masses in hydrological systems (water bodies, e.g., rivers with tributaries) bounded by streamlines and equipotential lines are proposed to be described using analogues of Darcy's law, accounting for both surface and groundwater, the influence of which is modeled as sources of transverse perturbations to the base flow. The modeling methodology for such processes is based on the development and adaptation of numerical complex analysis methods, specifically on the transition from direct problems of conformal mapping of the physical domain onto the complex potential domain to the corresponding inverse boundary value problems. The well-posedness of these problems

(according to the Riemann mapping theorem) is ensured by the requirements for the correspondence of boundary points between the initial physical domain and the respective complex potential domain. An approximate solution to the corresponding finite-difference problem is obtained using an algorithm based on the step-by-step parametrization of conformal invariants, as well as boundary and interior nodes of the grid analogue of the physical domain, utilizing principles of block iteration and Seidel methods.

Furthermore, the values of control potentials determined through the problem calculations possess the property of optimality, which is a decisive factor for the adequate reproduction of hydrodynamic processes. Applying these potentials within the mathematical model allows not only for the generation but also for a detailed analysis of various scenarios regarding the formation of the kinematic flow structure directly within the computational physical domain (water body). The primary indicator of the hydrosystem's state is the position of dividing streamlines formed during the movement of water masses. These lines demarcate the zones of influence of various hydrodynamic factors (sources of perturbations) and are formed depending on the potential values and the ratios between them and the optimal (key) potentials. This approach enables modeling the flow structure, determining the stream function and complex potential, calculating discharge, cross-flows, and velocity fields, constructing a hydrodynamic flow net, and supporting water resource management decisions. Such an approach facilitates the development of intelligent systems for forecasting the hydrological regime of a water body.

Keywords: mathematical modeling, numerical methods, conformal mapping, inverse boundary value problems, Darcy's law, controlled slow flows, hydrological systems, water resource management, intelligent forecasting systems.

Отримано: 31 січня 2026 року

Прорецензовано: 25 лютого 2026 року

Прийнято до друку: 27 березня 2026 року



© 2026 [Bomba A. Y., Kashtan S. S.]. Licensee [NUWEE]. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial (CC BY-NC) license (creativecommons.org).