

**Прищеп О.В.** [0000-0001-8032-1223],  
к.ф.-м.н., доцент,

*<sup>1</sup> Національний університет водного господарства та  
природокористування, м. Рівне*

## **РЕКУРЕНТНИЙ МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ З ОБМЕЖЕНИМ ЧИСЛОМ ПОВТОРІВ**

У роботі досліджено математичні моделі систем масового обслуговування з повторними викликами, де кількість спроб повторно отримати обслуговування є обмеженою. Такі обмеження зумовлені нетерплячістю вимог або межами наявних ресурсів, що точніше відображає реальні процеси в системах зв'язку, комп'ютерних мережах та при управлінні посадкою повітряних суден.

Для моделювання процесу обслуговування використано багатовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом, для якого визначено інфінітезимальні характеристики та доведено існування стаціонарного режиму системи. Оскільки для загального випадку з довільною кількістю джерел повторних викликів знайти явні формули для стаціонарних ймовірностей неможливо, запропоновано ефективний підхід із використанням урізаної моделі. Ця модель передбачає фіксоване число місць для кожної сукупності вимог на орбіті. Встановлено, що процеси обслуговування основної та урізаної систем є процесами міграції та стохастично впорядкованими, завдяки чому стаціонарні ймовірності урізаної моделі коректно апроксимують вихідну систему.

Головним результатом є розроблений рекурентний обчислювальний алгоритм для знаходження стаціонарного розподілу, що базується на теорії процесів квазі народження та загибелі. Отримані результати мають вагоме практичне значення для оптимального вибору параметрів моделі та керування вхідним потоком з метою уникнення перевантажень.

**Ключові слова:** система масового обслуговування з повторними викликами, ланцюг Маркова, стаціонарні ймовірності, процес квазі народження та загибелі, рекурентний алгоритм.

**Вступ.** Класична теорія систем масового обслуговування є ефективним знаряддям для розв'язку низки практичних задач. Проте в більшості випадків стоїть питання точності та доцільності використання сучасніших моделей із врахуванням феномену повторних викликів, що точніше відображають реальні процеси. Для систем з повторними викликами, в яких вимоги, що надійшли до системи при зайнятості всіх каналів обслуговування, повертаються після деякого періоду часу, щоб отримати обслуговування [1, 3].

Зацікавленість такими системами в різних сферах, зокрема, в системах зв'язку, в комп'ютерних мережах, при керуванні посадкою повітряних суден спонукає розглядати різні модифікації моделей та розробляти ефективні підходи до їх дослідження. Зазвичай для систем з повторними викликами вважають, що вимоги можуть повторно звертатися до тих пір, поки не отримають обслуговування. Однак доцільно звернути увагу на те, що кількість спроб повторно отримати обслуговування може бути обмежена і визначатися особливістю нетерплячості вимог, обмеженістю наявних ресурсів та іншим. Знаходження стаціонарного розподілу для таких систем в більшості випадків є складною задачею. Про це говорить незначна кількість робіт, об'єктом аналізу яких є системи з обмеженнями на кількість повторних спроб. Зокрема, у роботі [6] аналітичний результат отримано лише у випадку системи з однією спробою повтору. Для дослідження систем з трьома та більше повторними спробами використовується імітаційне моделювання.

З практичної точки зору доцільно розглядати системи з обмеженим числом повторних спроб, в яких інтенсивність вхідного потоку є змінною та залежить від кількості сформованих джерел повторних викликів (див. наприклад, [4, 5]). У такому випадку існує можливість керувати вхідним потоком, щоб виключити перевантаження системи. Тому дослідження систем з обмеженим числом повторних спроб залишається актуальним на даний час, особливо напрямом, що пов'язаний оптимальним вибором параметрів моделі в межах обраної стратегії керування.

**Математична модель.** Розглянемо  $(m+1)$ -вимірний ланцюг Маркова з неперервним часом  $Q^m(t) = (Q_0(t), Q_1(t), \dots, Q_m(t))$ ,  $t \geq 0$  у фазовому просторі  $S(Q^m) = \{0, 1, \dots, c\} \times Z_+^m$ , де  $Z_+$  – множина цілих невід'ємних чисел. Компонента  $Q_0(t)$  вказує на

кількість зайнятих приладів у момент часу  $t$ , а компоненти  $Q_k(t)$  визначають число вимог у момент часу  $t$ , які зробили  $k$  невдалих спроб отримати обслуговування,  $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  – кількість повторних спроб. Інфінітезимальні характеристики  $a_{\beta\beta'}$ ,  $\beta = (i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m)$ ,  $\beta' = (i', j'_1, \dots, j'_k, \dots, j'_m) \in S(Q^m)$  ланцюга Маркова  $Q^m(t)$  визначаються наступним чином:

1) якщо  $i = 0, 1, \dots, c-1$ ,  $j_k \in Z_+$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , то

$$a_{\beta\beta'} = \begin{cases} \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m}, \beta' = (i+1, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ i\mu, \beta' = (i-1, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ j_k v_k, \beta' = (i+1, j_1, \dots, j_k-1, \dots, j_m), \quad k = \overline{1, m}, \\ -(\lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} + i\mu + \sum_{k=1}^m j_k v_k), \beta' = (i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ 0, \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (1)$$

2) якщо  $i = c, j_k \in Z_+$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , то

$$a_{\beta\beta'} = \begin{cases} \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m}, \beta' = (c, j_1+1, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ c\mu, \beta' = (c-1, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ j_k v_k, \beta' = (c, j_1, \dots, j_k-1, j_{k+1}+1, \dots, j_m), \quad k = \overline{1, m-1} \\ j_m v_m, \beta' = (c, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m-1), \\ -(\lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} + c\mu + \sum_{k=1}^m j_k v_k), \beta' = (c, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2)$$

Даний ланцюг Маркова відповідає процесу обслуговування в наступній системі. На вхід системи з  $c$  приладами ззовні надходять вимоги для обслуговування. Якщо в момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Час обслуговування має показниковий розподіл з параметром  $\mu$ . Якщо ж всі прилади зайняті, то вимога надходить на орбіту та формує джерело повторного виклику. Таким чином має можливість спробувати отримати обслуговування  $m+1$  раз, враховуючи початкове звернення. На орбіті вимоги формують окремі сукупності відповідно до числа здійснених спроб отримати

обслуговування. Тобто вимога, що здійснила  $k$ -ту спробу, є елементом  $k$ -ї сукупності. Якщо така вимога здійснює наступну спробу отримати обслуговування, то у випадку наявності вільного приладу вона обслуговується та залишає систему. В іншому випадку така вимога формує ще одне джерело повторного виклику, що відноситься до  $(k+1)$ -ї сукупності. При цьому звільняється місце в  $k$ -й сукупності. Вимога, яка при  $(m+1)$ -й спробі (враховуючи початкову) застає всі прилади зайнятими, залишає систему та не отримує обслуговування.

Така система визначається наступними параметрами:  $\lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m}$  – інтенсивністю вхідного потоку,  $j_k \in Z_+$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ ,  $\mu$  – інтенсивністю обслуговування;  $\nu_k$  – інтенсивністю  $k$ -ї повторної спроби,  $k=1, 2, \dots, m$ ,  $m$  – кількість повторних спроб.

Будемо вважати, що  $\lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m}, \mu, \nu_k > 0$ ,  $j_k \in Z_+$ ,  $k=1, 2, \dots, m$  завжди виконується на практиці і при виконанні цієї вимоги параметри моделі є невироджені.

Формально структуру системи з  $m$  повторними спробами можна подати наступним чином (див. рисунок).

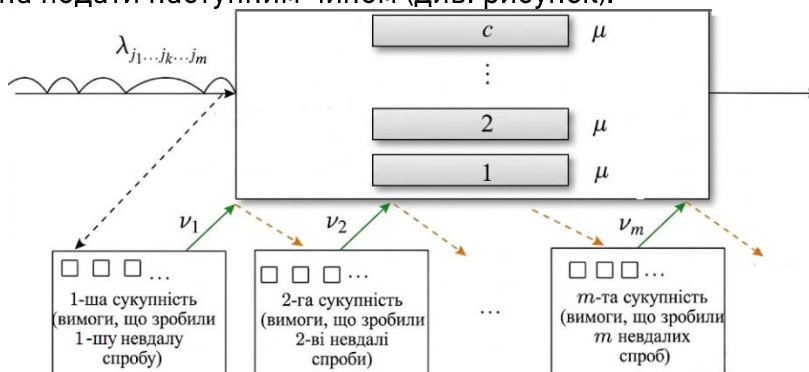


Рисунок. Структура стохастичної системи з  $m$  повторними спробами.

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування  $Q^m(t)$ .

**Лема 1.** Якщо виконується умова  $\lim_{j_m \rightarrow \infty} j_m^{-1} \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} < \nu_m$  та  $\lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m}, \mu, \nu_k > 0$ ,  $j_k \in Z_+$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ , то для процесу

обслуговування  $Q^m(t)$ ,  $t \geq 0$  багатоканальної системи  $m$  повторними спробами існує стаціонарний режим.

*Доведення.* Для того, щоб довести існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування  $Q^m(t)$ ,  $t \geq 0$  застосуємо теорему Твіді [3, с. 97]. Розглянемо тест-функції Ляпунова у вигляді

$$\varphi(i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m) = \varphi(\beta) = \sum_{k=1}^m j_k, \quad \beta \in S(Q^m).$$

Для них середній перенос при  $\beta = (i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m)$ ,  $\beta' = (i', j'_1, \dots, j'_k, \dots, j'_m) \in S(Q^m)$  дорівнює

$$y_{\beta} = \sum_{\beta \neq \beta'} a_{\beta\beta'} (\varphi(\beta') - \varphi(\beta)) = \begin{cases} - \sum_{k=1}^m j_k \nu_k, & \text{при } i = 0, 1, \dots, c-1, \\ \lambda_{j_1, j_2, \dots, j_m} - j_m \nu_m, & \text{при } i = c. \end{cases}$$

При  $\lim_{j_m \rightarrow \infty} j_m^{-1} \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} < \nu_m$  та  $\lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m}, \mu, \nu_k > 0$ ,

$j_k \in Z_+$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  для  $y_{i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m}$  виконуються умови теореми Твіді ([3], с. 97). Отже, процес  $Q^m(t)$  є регулярним, ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним розподілом. *Лему доведено.*

Нехай

$$\pi_{i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Q_0^m(t) = i, Q_1^m(t) = j_1, \dots, Q_m^m(t) = j_m\},$$

$(i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m) \in S(Q^m)$  стаціонарні ймовірності системи, що задовольняють наступну систему рівнянь Колмогорова:

$$\begin{aligned} & \left( \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} + i\mu + \sum_{k=1}^m j_k \nu_k \right) \pi_{i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} = \\ & = \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} \pi_{i-1, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} + (i+1)\mu \pi_{i+1, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} + \\ & + \sum_{k=1}^m (j_k + 1) \nu_k \pi_{i-1, j_1, \dots, j_k+1, \dots, j_m}, \quad j_k \in Z_+, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3) \\ & \left( \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} + c\mu + \sum_{k=1}^m j_k \nu_k \right) \pi_{c, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} = \\ & = \lambda_{j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} \pi_{c-1, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m} + \lambda_{j_1-1, \dots, j_k, \dots, j_m} \pi_{c, j_1-1, \dots, j_k, \dots, j_m} + \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m (j_k + 1) \nu_k \pi_{c-1, j_1, \dots, j_k+1, \dots, j_m} + \sum_{k=1}^{m-1} (j_k + 1) \nu_k \pi_{c, j_1, \dots, j_k+1, j_{k+1}-1, \dots, j_m} + (j_m + 1) \nu_m \pi_{c, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m+1}. \quad (4)$$

Оскільки знайти явні формули для стаціонарних ймовірностей системи (3)–(4) за довільної кількості джерел повторних викликів аналітично неможливо, доцільно перейти до розгляду її урізаної моделі  $M/M/c/N$  з  $m$  повторними спробами. Така система має фіксоване число  $N$  місць для кожної  $k$ -ї сукупності, яка формується вимогами, що здійснили  $k$  невдалих спроб. Це означає, що вимога залишає систему після  $k$ -ї спроби отримати обслуговування, якщо заповнені всі  $N$  місць відповідної  $k$ -ї сукупності джерел повторних викликів.

Процес обслуговування для системи  $M/M/c/N$  визначається  $(m+1)$ -вимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом  $Q^{m,N}(t) = (Q_0^N(t), Q_1^N(t), \dots, Q_m^N(t))$ ,  $t \geq 0$  у фазовому просторі

$$S(Q^{m,N}) = \{0, 1, \dots, c\} \times \underbrace{\{0, 1, \dots, N\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, N\}}_m,$$

де  $Q_0^N(t)$  – кількість зайнятих приладів у момент часу  $t$  у системі,  $Q_k^N(t)$  – кількість вимог у момент часу  $t$ , які зробили  $k$  невдалих спроб отримати обслуговування,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Інфінітезимальні характеристики  $a_{\beta\beta'}^N$ ,  $\beta = (i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m)$ ,  $\beta' = (i', j'_1, \dots, j'_k, \dots, j'_m) \in S(Q^{m,N})$  ланцюга  $Q^{m,N}(t)$  співпадають з (1) для  $i = 0, 1, \dots, c-1$ ,  $j_k = 0, 1, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  та з (2) для випадків:  $i = c$ ,  $j_k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  та  $i = c$ ,  $j_1 = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $j_k = N$ ,  $j_{k+1} = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $k = 2, \dots, m$ ,  $j_l = 0, 1, \dots, N$ ,  $l \neq 1, k, k+1$ . У інших випадках визначаються наступним чином:

1) якщо  $i = c$ ,  $j_1 = N$ ,  $j_k = 0, 1, \dots, N$ ,  $j_{k+1} = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $k = 2, \dots, m$ ,  $j_l = 0, 1, \dots, N$ ,  $l \neq 1, k, k+1$ , то

$$a_{\beta\beta'}^N = \begin{cases} c\mu, & \text{при } \beta' = (c-1, N, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ N\nu_1, & \text{при } \beta' = (c, N-1, j_2+1, \dots, j_m), \\ j_k\nu_k, & \text{при } \beta' = (c, j_1, \dots, j_k-1, j_{k+1}+1, \dots, j_m), k = \overline{2, m-1} \\ j_m\nu_m, & \text{при } \beta' = (c, j_1, \dots, j_k, \dots, N-1), \\ -\left(c\mu + N\nu_1 + \sum_{k=2}^m j_k\nu_k\right), & \text{при } \beta' = (c, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

2) якщо  $i = c$ ,  $j_1 = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $j_k = 0, 1, \dots, N$ ,  $j_{k+1} = N$ ,  $k = 2, \dots, m$ ,  $j_l = 0, 1, \dots, N$ ,  $l \neq 1, k, k+1$ , то

$$a_{\beta\beta'}^N = \begin{cases} \lambda_{j_1, \dots, j_k, N, \dots, j_m}, & \beta' = (c, j_1+1, \dots, j_k, N, \dots, j_m), \\ c\mu, & \beta' = (c-1, j_1, \dots, j_k, N, \dots, j_m), \\ j_k\nu_k, & \beta' = (c, j_1, \dots, j_k-1, N, \dots, j_m), k = \overline{1, m-1} \\ j_m\nu_m, & \beta' = (c, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m-1), \\ -\left(\lambda_{j_1, \dots, j_k, N, \dots, j_m} + c\mu + \sum_{k=1}^m j_k\nu_k\right), & \\ & \beta' = (c, j_1, \dots, j_k, N, \dots, j_m), \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

3) якщо  $i = c$ ,  $j_1 = N$ ,  $j_k = 0, 1, \dots, N$ ,  $j_{k+1} = N$ ,  $k = 2, \dots, m$ ,  $j_l = 0, 1, \dots, N$ ,  $l \neq 1, k, k+1$ , то

$$a_{\beta\beta'}^N = \begin{cases} c\mu, & \text{при } \beta' = (c-1, N, \dots, j_k, \dots, j_m), \\ N\nu_1, & \text{при } \beta' = (c, N-1, N, \dots, j_m), \\ j_k\nu_k, & \text{при } \beta' = (c, N, \dots, j_k-1, N, \dots, j_m), k = \overline{2, m-1} \\ j_m\nu_m, & \text{при } \beta' = (c, N, \dots, j_k, \dots, j_m-1), \\ -\left(c\mu + N\nu_1 + \sum_{k=2}^m j_k\nu_k\right), & \text{при } \beta' = (c, N, \dots, j_k, N, \dots, j_m), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки фазовий простір процесу  $Q^{m,N}(t)$  скінченний, то для

нього існує стаціонарний режим і через  $\pi_{i,j_1,\dots,j_k,\dots,j_m}^N$ ,  $(i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m) \in S(Q^{m,N})$  будемо позначати стаціонарні ймовірності урізаної моделі:

$$\pi_{i,j_1,\dots,j_k,\dots,j_m}^N = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{Q_0^N(t) = i, Q_1^N(t) = j_1, \dots, Q_m^N(t) = j_m\}.$$

Вигляд інфінітезимальних характеристик  $a_{\beta\beta'}$ ,  $\beta = (i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m)$ ,  $\beta' = (i', j'_1, \dots, j'_k, \dots, j'_m) \in S(Q^m)$  та  $a_{\beta\beta'}^N$ ,  $\beta, \beta' \in S(Q^{m,N})$  дає право говорити, що процеси обслуговування  $Q^m(t)$  та  $Q^{m,N}(t)$  є процесами міграції та стохастично впорядковані [3]. Тоді при  $N \rightarrow \infty$  стаціонарні ймовірності  $\pi_{i,j_1,\dots,j_k,\dots,j_m}^N$  урізаної моделі  $M/M/c/N$  апроксимують стаціонарні ймовірності  $\pi_{i,j_1,\dots,j_k,\dots,j_m}$  моделі  $M/M/c/\infty$ .

Для побудови алгоритму знаходження стаціонарних ймовірностей розглянемо спочатку багатоканальну систему з однією спробою повтору, процес обслуговування якої моделюється ланцюгом Маркова з неперервним часом  $Q(t) = (Q_0(t), Q_1(t))$ ,  $t \geq 0$  з множиною станів  $S(Q) = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots\}$ . При  $c \geq 2$  та довільній кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)^T$ ,  $\pi_j = (\pi_{0j}, \pi_{1j}, \dots, \pi_{cj})^T$ ,  $j = 0, 1, \dots$  неможливо, тому використаємо урізану модель даної системи  $M/M/c/N$ , що має скінченну кількість місць для повторних викликів  $N$ . Якщо всі прилади зайняті та існує  $N$  джерел повторних викликів, то нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди. Процес обслуговування даної системи моделюється ланцюгом Маркова з неперервним часом  $Q^N(t) = (Q_0^N(t), Q_1^N(t))$ ,  $t \geq 0$  та множиною станів  $S(Q^N) = \{0, 1, \dots, c\} \times \{0, 1, \dots, N\}$ . Подамо множину станів у вигляді  $S(Q^N) = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_N$ , де  $S_j = \{(0, j), (1, j), \dots, (c, j)\}$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ . Матриця інфінітезимальних характеристик ланцюга  $Q^N(t)$  матиме вигляд блочної тридіагональної матриці розмірності



$$[(c+1)(N+1)] \times [(c+1)(N+1)]:$$

$$A = \begin{pmatrix} B_0 & D_0 & & & & \\ C_1 & B_1 & D_1 & & & \\ & C_2 & B_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & B_{N-1} & D_{N-1} \\ & & & & C_N & B_N \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де  $B_j$ ,  $j=0,1,\dots,N$ ,  $C_j$ ,  $j=1,2,\dots,N$ ,  $D_j$ ,  $j=0,1,\dots,N-1$  – матриці розмірності  $(c+1) \times (c+1)$ , що визначаються наступним чином:

$B_j = \|b_{ik}^j\|_{i,k=0}^c$ , де  $b_{ii}^j = -(\lambda_j + i\mu + j\nu)$ ,  $i=0,1,\dots,c$ ,  $j=0,1,\dots,N-1$   
 $b_{ii}^N = -(\lambda_N + i\mu + N\nu)$ ,  $i=0,1,\dots,c-1$ ,  $b_{cc}^N = -(c\mu + N\nu)$ ,  $b_{ii-1}^j = i\mu$ ,  
 $i=1,2,\dots,c$ ,  $j=0,1,\dots,N$ ,  $b_{ii+1}^j = \lambda_j$ ,  $i=0,1,\dots,c-1$ ,  $j=0,1,\dots,N$ ,  
інші елементи дорівнюють нулю;

$C_j = \|c_{ik}^j\|_{i,k=0}^c$ , де  $c_{ii+1}^j = j\nu$ ,  $i=0,1,\dots,c-1$ ,  $c_{cc}^j = j\nu$ ,  $j=1,2,\dots,N$ ,  
інші елементи дорівнюють нулю;

$D_j = \|d_{ik}^j\|_{i,k=0}^c$ , де  $d_{cc}^j = \lambda_j$ ,  $j=0,1,\dots,N-1$ , інші елементи дорівнюють нулю.

Таким чином,  $Q^N(t) = (Q_0^N(t), Q_1^N(t))$ ,  $t \geq 0$  є процесом квазі народження та загибелі з матрицею інфінітезимальних характеристик (5), де  $Q_0^N(t)$  є фазою, а  $Q_1^N(t)$  – рівнем. Результати Л. Брайта та П. Г. Тейлора [2] та методи дослідження систем масового обслуговування, що базуються на теорії процесів квазі народження та загибелі, дозволяють побудувати рекурентний обчислювальний алгоритм для стаціонарних ймовірностей системи з однією спробою повтору.

**Алгоритм знаходження стаціонарних ймовірностей.** Введемо позначення:  $\bar{1}_i$  – вектор-стовпець, що складений з одиниць розмірності  $i$ ;  $O_i$  – матриця, елементи якої є нулі, розмірності  $i \times i$ ;  $\bar{0}_i$  – вектор-стовпець, що складається з нулів, розмірності  $i$ .

Позначимо через  $\pi^N = (\pi_0^N, \pi_1^N, \dots, \pi_N^N)^T$ ,  $\pi_j^N = (\pi_{0j}^N, \pi_{1j}^N, \dots, \pi_{cj}^N)^T$  стаціонарний розподіл, що задовольняє наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} (\pi^N)^T A &= \bar{0}_{(c+1)(N+1)}^T, \\ (\pi^N)^T \bar{1}_{(c+1)(N+1)} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Скористаємося результатами [2], відповідно до яких необхідно побудувати сімейство матриць  $\{R_j, j \geq 0\}$ , що є мінімальними невід'ємними розв'язками системи рівнянь

$$D_j + R_j B_{j+1} + R_j R_{j+1} C_{j+2} = O_{c+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Тоді стаціонарні ймовірності обчислюються через матриці  $R_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$

$$(\pi_j^N)^T = (\pi_0^N)^T \prod_{k=0}^{j-1} R_k, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

та задовольняють умову нормування

$$(\pi_0^N)^T \bar{1}_{c+1} + (\pi_0^N)^T \left( \sum_{i=1}^N \prod_{k=0}^{i-1} R_k \right) \bar{1}_{c+1} = 1. \quad (8)$$

Використовуючи (7), маємо рекурентні співвідношення для побудови матриць  $R_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-2$ :

$$\begin{aligned} R_j &= D_j (-B_{j+1} - R_{j+1} C_{j+2})^{-1}, \\ j &= 0, 1, \dots, N-2, R_{N-1} = -D_{N-1} (B_N)^{-1}. \end{aligned}$$

Для знаходження вектора стаціонарних ймовірностей  $\pi_0^N$  скористаємося першим рівнянням системи (6), тобто

$$(\pi_0^N)^T (B_0 + R_0 C_1) = \bar{0}_{c+1}^T$$

та умовою нормування (8).

Подамо алгоритм пошуку стаціонарного розподілу  $\pi^N$  для системи з однією повторною спробою:

- 1) Побудова матриць  $B_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N$ ,  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $D_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$  на основі параметрів системи;

- 2) побудова матриці  $R_{N-1} = -D_{N-1}(B_N)^{-1}$ ;
- 3) побудова матриць  $R_i = D_i(-B_{i+1} - R_{i+1}C_{i+2})^{-1}$ ,  
 $i = N-2, N-3, \dots, 0$ ;
- 4) знаходження  $\pi_0^N$  з рівняння  $(\pi_0^N)^T(B_0 + R_0C_1) = \bar{0}_{c+1}^T$   
при умові нормування  $(\pi_0^N)^T \bar{1}_{c+1} + (\pi_0^N)^T \left( \sum_{i=1}^N \prod_{k=0}^{i-1} R_k \right) \bar{1}_{c+1} = 1$ ;
- 5) знаходимо стаціонарні ймовірності  $(\pi_j^N)^T = (\pi_0^N)^T \prod_{k=0}^{j-1} R_k$ ,  
 $j = 1, 2, \dots, N$ .

Враховуючи принцип функціонування системи з  $m$  повторними спробами та структуру процесу обслуговування, можемо застосовувати побудований рекурентний обчислювальний і для вказаних систем.

**Висновки.** У роботі досліджено стохастичні системи масового обслуговування з обмеженим числом повторних спроб, для яких побудовано математичну модель у вигляді багатовимірного ланцюга Маркова з неперервним часом. Доведено існування стаціонарного режиму для досліджуваної системи. Оскільки побудова явних аналітичних формул для систем із довільною кількістю джерел є неможливою, обґрунтовано використання урізаної моделі, стаціонарні ймовірності якої коректно апроксимують характеристики вихідної системи. Представлено рекурентний обчислювальний алгоритм для знаходження стаціонарного розподілу, що базується на теорії процесів квазі народження та загибелі. Отриманий результат має практичне значення для розрахунку стаціонарних ймовірностей та функціоналу якості системи в мовах керування вхідним потоком вимог та оптимізації параметрів моделі для запобігання перевантаженню системи.

1. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 317 p. 2. Bright L., Taylor P. G. Calculating the equilibrium distribution in level dependent quasi-birth-and-death processes. *Stochastic Models*. 1995. Vol. 11, № 3. P. 497–525. 3. Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997. 317 p. 4. Lebedev, E.A., Ponomarov, V.D., Pryshchepa, O.V. On Multiserver State-Dependent Retrial Queues Operating in Stationary Regime. *Communications in Computer and Information Science*. 2021. Vol. 1391. P. 95–107. 5. Pryshchepa O.V., Lebedev E.O. On a Multi-Channel Retrial Queueing System. *Cybernetics*

*and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, №3. P. 441–449. **6.** Shin Y. W., Moon D. H. Retrial queues with limited number of retrials: Numerical investigations. 7th Intern. Symposium on Operations Research and Its Applications ISORA'08. 2008. P. 237–247.

## REFERENCES

**1.** Artalejo J. R., Gomez-Corral A. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Berlin: Springer, 2008. 317 p. **2.** Bright L., Taylor P. G. Calculating the equilibrium distribution in level dependent quasi-birth-and-death processes. *Stochastic Models*. 1995. Vol. 11, № 3. P. 497–525. **3.** Falin G. I., Templeton J. G. C. Retrial Queues. London: Chapman and Hall, 1997. 317 p. **4.** Lebedev, E.A., Ponomarov, V.D., Pryshchepa, O.V. On Multiserver State-Dependent Retrial Queues Operating in Stationary Regime. *Communications in Computer and Information Science*. 2021. Vol. 1391. P. 95–107. **5.** Pryshchepa O.V., Lebedev E.O. On a Multi-Channel Retrial Queueing System. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, №3. P. 441–449. **6.** Shin Y. W., Moon D. H. Retrial queues with limited number of retrials: Numerical investigations. 7th Intern. Symposium on Operations Research and Its Applications ISORA'08. 2008. P. 237–247.

---

**Pryshchepa O.V.** <sup>[1 ORCID: 0000-0001-8032-1223]</sup>

PhD, Associate Professor

<sup>1</sup>National University of Water and Environmental Engineering, Rivne

## RECURRENT METHOD FOR CALCULATING STATIONARY PROBABILITY FOR SYSTEMS WITH A LIMITED NUMBER OF REPETITIONS

**The paper investigates mathematical models of retrial queueing systems where the number of attempts to obtain service is limited. Such limitations are primarily caused by impatient customers or the severe constraints of available system resources. Incorporating these restrictions more accurately reflects complex real-world processes observed in modern communication systems, computer networks, and critical operations such as aircraft landing control.**

**To formally model the service process, a multidimensional continuous-time Markov chain is constructed. The phase space components specifically indicate the number of busy service channels and the precise number of requests that have made a certain number**

**of failed attempts to obtain service. For this mathematical process, the existence of the system's stationary regime is proven, formally confirming that the investigated process is regular and ergodic.**

**Since it is analytically impossible to find explicit formulas for stationary probabilities in the general case with an arbitrary number of retrieval sources, an effective mathematical approach using a truncated model is proposed. This truncated model assumes a fixed finite number of places for each distinct group of requests currently in the orbit. It is analytically established that the service processes of both the original and the truncated systems function as migration processes and are stochastically ordered. Consequently, this significant feature allows the stationary probabilities of the truncated model to approximate the original system's behaviour accurately and reliably.**

**The main scientific result of the paper is a recurrent computational algorithm specifically designed for finding the stationary distribution. This algorithm is heavily based on the mathematical theory of quasi-birth-and-death processes, effectively leveraging the block-tridiagonal structure of the infinitesimal generator matrix. The obtained theoretical and algorithmic results have substantial practical value, enabling the optimal tuning of model parameters and the dynamic regulation of input flows to mitigate and prevent system congestion.**

**Keywords:** retrieval queue, Markov chain, stationary probabilities, quasi-birth-and-death process, recurrent algorithm.

---

Отримано: 01 квітня 2026 року  
Прорецензовано: 27 квітня 2026 року  
Прийнято до друку: 29 травня 2026 року



© 2026 [Pryshchepa O.V.]. Licensee [NUWEE]. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial (CC BY-NC) license ([creativecommons.org](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)).