

Кухнюк О. М., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

АПРОКСИМАЦІЯ ПРОГИНІВ ЗГИНАЛЬНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В УМОВАХ ЧИСТОГО ЗГИНУ

В даній роботі пропонується модель лінійної апроксимації залізобетонних елементів в умовах чистого згину на основі узагальненої інформації по випробуванням залізобетонних балок. Наведено приклад розрахунку, що базується на стандартизованих методиках [0].

Ключові слова: прогин; залізобетонні елементи; зосереджене навантаження; діаграми деформації.

Вступ. Вивчення деформативних властивостей бетону згинальних залізобетонних елементів були в центрі уваги багатьох дослідників на протязі багатьох років. Одним із найважливіших параметрів, в розрізі експлуатації конструкцій, є вивчення прогинів. Переважна більшість будівельних норм та правил розглядають прогин конструкцій також з точки зору безпеки. Безпека гарантує уникнення жертв при руйнуванні конструкцій, а для цього необхідно забезпечити людям достатньо часу для виявлення небезпечних деформацій та забезпечення евакуації [0]. В цій роботі наведена апроксимації прогинів залізобетонних елементів, на прикладі проведених багатьох експериментальних досліджень, з врахуванням моменту інерції (величина якого змінюється вздовж довжини прольоту від ділянок без тріщин до ділянок з тріщинами).

Аналіз досліджень

На сучасному етапі науковці сходяться на думці, що гістерезисні криві прогину в залізобетонних балках, в критичних точках, відбувається як показано на рисунку 1 [0]. На рисунку демонструється, що елементи балки зазвичай піддаються двом деформаціям: згину та зсуву (рис. 1). У зоні чистого згину відбувається лише деформація згину, тоді як в області 2, де існують і згин, і зсув, відбуваються як деформації згину, так і зсуву. Після розтріскування під дією зовнішнього навантаження залізобетонні елементи демонструють поведінку, відмінну від описаної в класичній

теорії пружності.

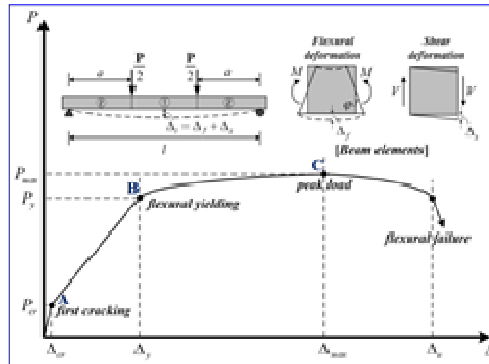


Рис. 1. Типова гістерезисна крива-прогину залізобетонних балок [1]

Робота залізобетонних балок під навантаженням передбачає появу в них тріщин. При їх утворенні, відповідно, відбувається зменшення жорсткості балки, на що вказує зміна напрямку лінії $P=f$, на рисунку цьому відповідає точка А. Саме точка «А», і є моментом утворення тріщини, при відповідному навантаженні P_{cr} (перші тріщини на поверхні балки). Відповідно її розглядають, як точку на кривій момент-прогин, в якій форма кривої поступово стає нелінійною [1].

Із збільшенням навантаження жорсткість балки зменшується до досягнення мінімальної жорсткості. Цей етап розвитку деформацій характеризується подальшим утворенням та розвитком існуючих тріщин по всій довжині балки, і в точці «В» відбувається подальша зміна кривизни. При цьому рівні навантаження стала арматура прогинається до $-P_y$ [1]. В подальшому, нахил кривої поступово змінюється, поки не буде досягнуто точки С. На цьому етапі виникають значні прогини при дуже незначному збільшенні навантаження, оскільки досягається максимальне навантаження P_{max} .

На наш погляд, описану вище класичну картину можна спростити, де гістерезисну криву можна привести до трьох прямих ОА, АВ і ВС. Точка, де дві лінії ОА(1) та АВ(2) перетинаються, можна прийняти за момент утворення тріщин. Подібним чином лінія перетину АВ(2) і ВС(3) можна прийняти за P_y , а точку С прийняти за P_{max} . Відповідно цим навантаженням відповідають прогини f_{cr} (на рис. 2 – Δ_{cr}), f_y (Δ_y) і f_u (Δ_u) рис. 2.

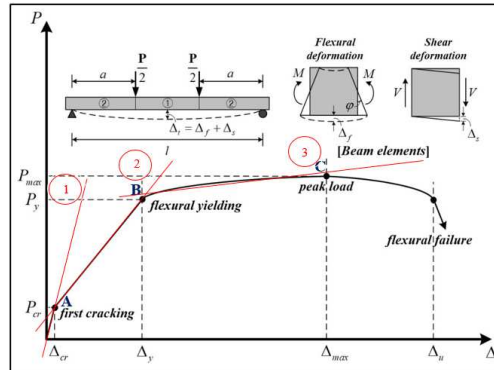


Рис. 2. Запропонована лінеаризована модель навантаження-прогин

Наведена модель, є більш зручною, оскільки вона дає можливість простими рівняннями досягти достатніх, для практичного використання, результатів, замість використання співвідношення момент-кривина, яке вимагає попереднього дослідження деформацій бетону і арматури на розтяг.

Така модель себе виправдала при дослідженні прогинів залізобетонних балок, які мали розрахункові схеми із однією зосередженою силою прикладеною в середині прольоту [0].

Постановка мети та задач досліджень. Ставиться задача:

- 1) продемонструвати за допомогою стандартизованих методик [0] можливість опису залежностей «навантаження – прогин» за допомогою лінійних апроксимацій, в умовах чистого згину, на ділянках які передують критичним навантаженням P_{cr} , P_y , P_{max} ;
- 2) на основі аналізу експериментальних досліджень різних авторів довести, що подібні апроксимації можна використовувати для аналітичного знаходження моменту тріщиноутворення.

Методика досліджень. Для доведення апроксимаційних залежностей були прораховані близько 35 балок за методикою [6], в даній статті наведемо результати кількох досліджень [3], [4], [5], які були проведені в різний час, в різних лабораторіях і при різних вихідних даних по складу бетону, сортаменту арматури, схемам навантаження і т.і. Схожість гістерезисних кривих прогинів залізобетонних елементів (залежність навантаження – прогини), що піддавались згинальним навантаженням, дає змогу, як альтернативу, запропонувати для спрощення лінеаризовану модель.

Розглянемо випробування залізобетонної балки з важкого бетону в умовах чистого згину.

Результати досліджень.

В роботі [3] була наведені експериментальні дослідження залізобетонних балок методика підсилення композитною системою Ruredil X Mesh Gold і її порівняння з непідсиленним варіантом залізобетонної балки.

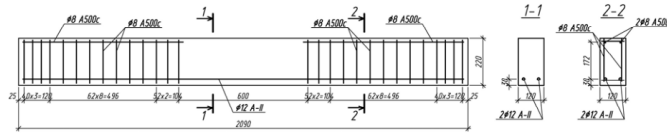


Рис. 3. Конструкція дослідних балок

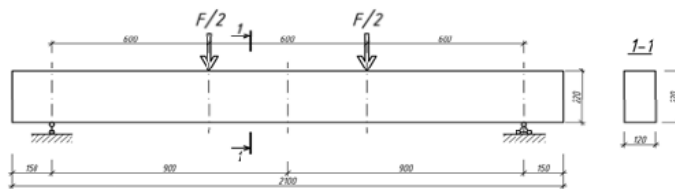


Рис. 4. Схема навантаження дослідних балок

За результатами випробувань були отримані наступні графіки прогинів досліджуваних балок (рис. 5)

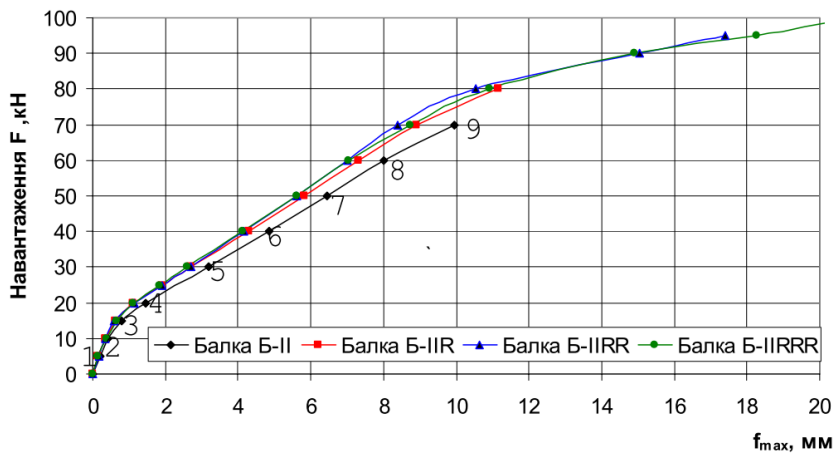


Рис. 5. Графіки прогинів досліджуваних балок

Графіки зміни прогинів показують, що жорсткість підсиленних балок були майже однаковою (рис. 5). Найбільшу деформативність, як і очікували, має непідсиленна балка (Б-II), порівняно з якою

жорсткість підсилених балок при навантаженні 40–70 кН збільшилася на 14–22%. Проте загальна поведінка утворення прогинів є практично незмінною (точки 1–5).

Продемонструємо зміну прогинів по непідсиленій балці Б-II, які наведені в (табл. 1).

Наведені чисельні значення показують, що з достатньою вірогідністю зміну прогинів згинального залізобетонного елемента f від рівня навантаження P , на різних ділянках, можна описати лінійною залежністю.

Для цього скористаємось методикою встановлення градуювальних залежностей і оцінка їх похибок, наведеною в [6] та вже використаною в [2].

Рівняння залежності прогинів f – від прикладеного зусилля P запишемо у вигляді:

$$P = P_0 + k \cdot f. \quad (1)$$

Таблиця 1

Прогини залізобетонної балки по балці Б-II

№	Марка балки	Рівень навантаження P , кН	Прогини f (мм)
1	Б-II	0	0
2	Б-II	5	0,16
3	Б-II	10	0,43
4	Б-II	15	0,79
5	Б-II	20	1,45
6	Б-II	30	3,17
7	Б-II	40	4,87
8	Б-II	50	6,45
9	Б-II	60	8,01
10	Б-II	70	9,94

Початкове значення P_0 обчислюємо за формулою:

$$P_0 = \bar{P}_e - k \cdot \bar{f}_e. \quad (2)$$

Коефіцієнт рівняння k знаходимо за формулою:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^N (f_{ei} - \bar{f}_e)(P_{ei} - \bar{P}_e)}{\sum_{i=1}^N (f_{ei} - \bar{f}_e)^2}, \quad (3)$$

де \bar{P}_e та \bar{f}_e – середні значення експериментальних рівнів навантаження і відповідних значень прогинів розраховують за формулами :

$$\bar{P}_e = \frac{\sum_{i=1}^N P_{ei}}{N}; \quad (4)$$

$$\bar{f}_e = \frac{\sum_{i=1}^N f_{ei}}{N}, \quad (5)$$

де P_{ei} та f_{ei} – відповідно експериментальні значення прикладеного зусилля та відповідних прогинів;

N – число проведених досліджень, що використані для побудови залежності.

Після знаходження градувальної залежності проводимо коригування залежності (1) вибракуванням окремих результатів випробування, якщо останні не відповідають умові:

$$\frac{|P_{ei} - P_{ii}|}{S} \leq 2, \quad (6)$$

де S – залишкове середнє квадратичне відхилення, яке визначаємо за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (P_{ei} - P_{ii})^2}{N - 2}}, \quad (7)$$

де P_{ii} – значення зусилля, знайдене за формулою (1) для відповідного рівня навантаження, тобто;

$$P_{ii} = P_0 + k \cdot f_{ei}. \quad (8)$$

Якщо відбулося вибракування окремих результатів, залежність встановлюють заново за формулами (1), (2), (3) за залишковими результатами.

Залежність можна вважати достовірною, якщо відносна похибка

$$\frac{S}{\bar{P}_e} < 12\%. \quad (9)$$

1) Вирішення 1 задачі дослідження.

За наведеною методикою та отриманими експериментальними результатами дослідників [0] (табл. 2) встановимо прогини за лінійною апроксимацією і переконаємося у справедливості спрощеного (лінійного) підходу для опису цих процесів.

Для цього розіб'єм криву прогинів на умовні ділянки які передують критичним навантаженням P_{cr} , P_y , P_{max} .

- Перша ділянка (до утворення тріщин P_{cr}):

Значення величин, обчислених за формулами (1–8) до вибраковки подані в табл. 2, а після вибраковки – в табл. 3.

У результаті розрахунків отримані такі значення:

Таблиця 2

Визначення дослідних значень прогинів, що підлягають перевірці на ділянці 1 (рис. 5, 6)

№ точки	Рівень навантаження P , кН		Перевірка умов	
	Експеримент P_{ei}	Теоретичні P_{ti} Формула (8)	$\frac{ P_{ei} - P_{ti} }{S} \leq 2$ Формула (6)	$\frac{S}{P_e} < 12\%$ Формула (9)
1	0	0,00	0,0	38,99%
2	5	2,83	0,6	
3	10	6,07	1,0	
4	15	9,98	1,3	
5	20	19,55	0,1	

На цьому етапі всі значення проходять умову (6), проте сама залежність не може вважатись достовірною за невиконання умови (9) – $\frac{S}{P_e} = 38,99\%$.

Недостатня точність моделі підтверджується і графічним способом (рис. 5).

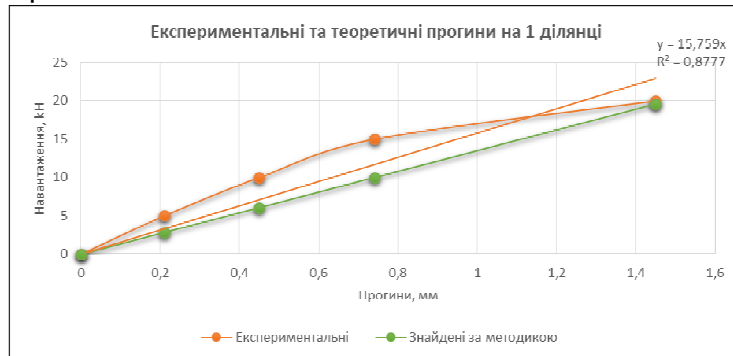


Рис. 5. Перша ділянка (до утворення тріщин P_{cr}) – для перших п'яти точок

Наведемо результати після відкидання «останньої» точки (табл. 3).

Таблиця 3

Визначення дослідних значень прогинів, що підлягають перевірці на ділянці 1 (рис. 5, 6)

№ точки	Рівень навантаження P , кН		Перевірка умов	
	Експеримент P_{ei}	Теоретичні P_{ti} Формула (8)	$\frac{ P_{ei} - P_{ti} }{S} \leq 2$ Формула (6)	$\frac{S}{P_e} < 12\%$ Формула (9)
1	0	0,00	0,0	9,74%
2	5	4,32	0,9	
3	10	9,25	1,0	
4	15	15,22	0,3	

При виконанні всіх умов (6) та (9) – отримуємо наступну лінійну залежність:

$$P = 20,56 \cdot f .$$

Ця функція узгоджується і з отриманою лінією тренду за допомогою математичного апарату Excel (див рис. 6).

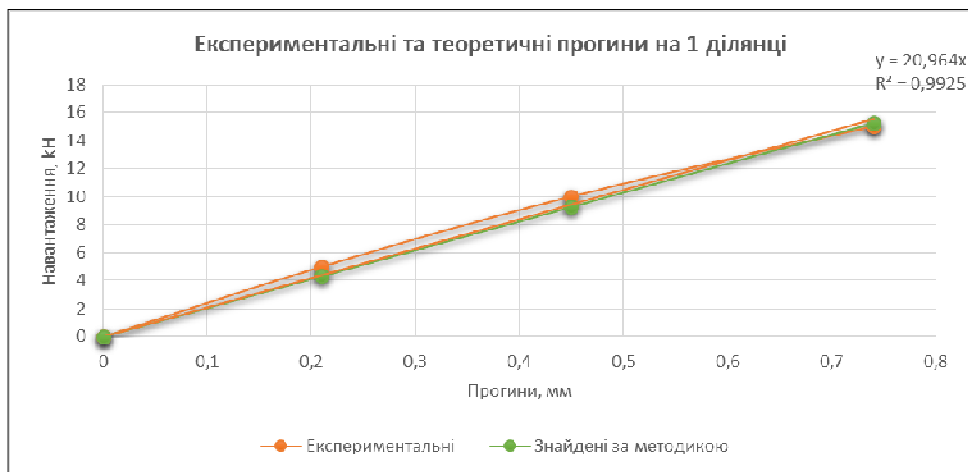


Рис. 6. Перша ділянка (до утворення тріщин P_{cr}) – для перших чотирьох точок

Розглянемо «поведінку» прогинів на наступній ділянці, що лежить до критичних значення P_y та P_{max} і відповідає наступним значенням – табл. 4.

Таблиця 4

Визначення дослідних значень прогинів, що підлягають перевірці на ділянці 2 (рис. 7)

№ точки	Рівень навантаження P , кН		Перевірка умов	
	Експеримент P_{ei}	Теоретичні P_{ti} Формула (8)	$\frac{ P_{ei} - P_{ti} }{S} \leq 2$ Формула (6)	$\frac{S}{P_e} < 12\%$ Формула (9)
5	20	19,9	0,1	1,3210%
6	30	30,2	0,3	
7	40	40,4	0,6	
8	50	49,8	0,4	
9	60	59,1	1,5	
10	70	70,6	1,1	

Табличні дані говорять про повну «адекватність» лінійної моделі – в результаті отримуємо також лінійну залежність (рис. 7):

$$P = 11,2627 + 5,9729 \cdot f.$$

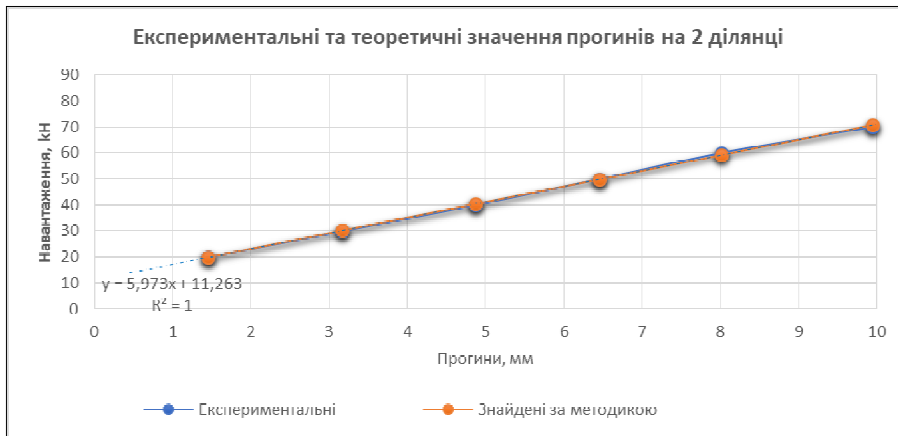


Рис. 7. Відповідність теоретичних та експериментальних прогинів для ділянки до P_{max}

З рисунку 7 можемо стверджувати про повну ідентичність отриманої залежності за методикою [6] та результатами побудови

лінії тренду за допомогою інструментів Excel з квадратним відхиленням $R^2 = 1$, що говорить про повний збіг експериментальних даних та значеннями прогинів, які були отримані нами.

2) Друга задача дослідження – а саме знаходження теоретичного моменту тріщиноутворення, впливає із аналізу об'єднаних лінійних графіків на ділянках 1 та 2.

За авторами перші нормальні тріщини виникли в невідсиленій балці Б-II при навантаженні $F = 7,5$ кН, а з графіку (рис. 4) можна орієнтовно визначити момент тріщиноутворення на рівні 15 кН.

Відштовхуючись від описаної вище картини зміни кривизни гістерезисних кривих прогинів внаслідок зменшення жорсткості балки і припущенням про можливість їх заміни на лінійні ділянки, отримуємо наступне (рис. 8).

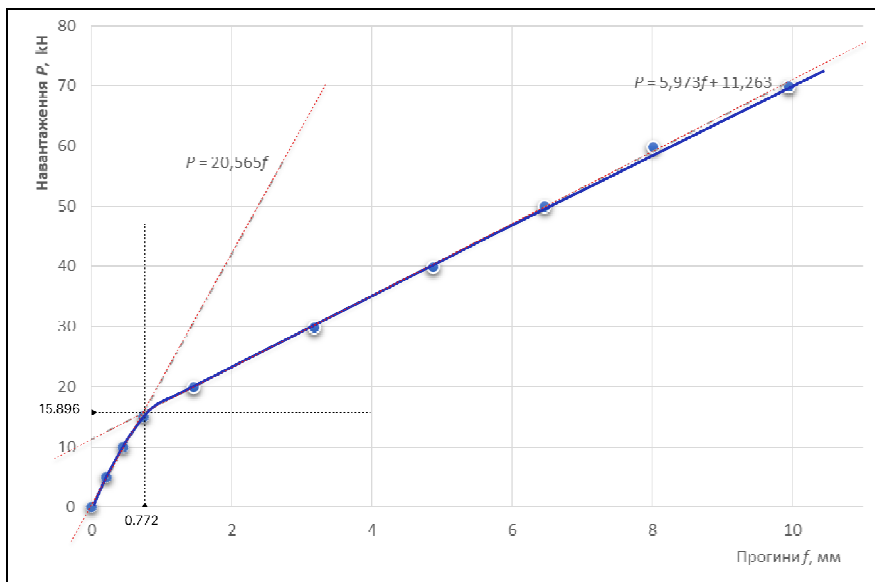


Рис. 8. Лінійна інтерпретація гістерезисної кривої прогинів балки Б-II

Злам лінійних залежностей спостерігається при досягненні рівня навантаження, що відповідає – P_{cpc} . Щоб знайти це значення аналітично необхідно вирішити систему віднайдених лінійних рівнянь:

- для першої ділянки $P = 20,56 \cdot f$;
- для другої ділянки $P = 11,2627 + 5,9729 \cdot f$.

В результаті розв'язку ми отримуємо спільні корені:

$$P_{crc} = 15,896 \text{ кН та } f_{crc} = 0,772 \text{ мм.}$$

Графічно ця критична точка знаходиться на перетині прямих і є моментом утворення тріщин, при відповідному навантаженні P_{crc} .

Висновки

1. Наведені результати показують, що при застосуванні спрощеної моделі на основі математичного апарату передбаченою в [6], можна описати розвиток прогинів прямолінійними ділянками, розбивши на певні етапи (ділянки), що враховують зміну жорсткості залізобетонних елементів під час утворення та розвитку тріщин в залізобетонних елементах.
2. Такий підхід дає змогу дослідникам значно спростити практичні деформаційні розрахунки, причому використовуючи математично надійний інструмент.
3. Модель проста і логічна, дозволяє експериментаторам аналітично отримувати критичні значення прикладеного навантаження.
4. Опосередковано, наведена лінеаризована модель навантаження-прогин дає змогу переконатися у коректності проведення та отриманих експериментальних даних.
5. За отриманими, в умовах експерименту, залежностями легко знаходити зусилля, які впливають на подібні конструкції, в умовах реальної експлуатації.

1. Kim S.-W., Kim K.-H. Prediction of Deflection of Reinforced Concrete Beams Considering Shear Effect. *Materials*. 2021. Vol. 14. № 21. P. 6684. 2. Кухнюк О. М. Апроксимація прогинів згинальних залізобетонних елементів під дією зосередженого навантаження. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Технічні науки*. 2023. Вип. 2(102). С. 201–213. 3. Мельник І. В. та інші. Експериментальні дослідження залізобетонних балок з поздовжньою арматурою класу А500С, підсилених композитною системою Ruredil X mesh Gold. *Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту*. 2011. Вип. № 39. С. 104–109. 4. Dr. Haider K. Ammash Muthana H. Muhaisin. Advanced model for the effective moment of inertia taking into account shear deformations effect. *Al-Qadisiyah Journal for Engineering Sciences*. 2009. Вип. 2. № 2. С. 108–128. 5. K. A. Patel et al. Explicit expression for effective moment of inertia of RC beams Latin American. *Journal of Solids and Structures*. 2015. № 12. Pp. 542–560. 6. ДСТУ Б.В.2.7-214: 2009. Бетони.

Методи визначення міцності за контрольними зразками. [Чинний від 2009-12-22]. К. : Мінрегіонбуд України, 2010. 43 с. (Національний стандарт України).

REFERENCES:

1. Kim S.-W., Kim K.-H. Prediction of Deflection of Reinforced Concrete Beams Considering Shear Effect. *Materials*. 2021. Vol. 14. № 21. P. 6684.
2. Kukhniuk O. M. Aproxymatsiia prohyniv zghynalnykh zalizobetonnykh elementiv pid diieiu zoseredzhenoho navantazhennia. *Visnyk Natsionalnoho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannia. Tekhnichni nauky*. 2023. Vyp. 2(102). S. 201–213.
3. Melnyk I. V. ta inshi. Eksperymentalni doslidzhennia zalizobetonnykh balok z pozdovzhnoi armaturoiu klasu A500S, pidsylenykh kompozytnoiu systemoiu Ruredil X mesh Gold. *Nauka ta prohres transportu. Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu*. 2011. Vyp. № 39. S. 104–109.
4. Dr. Haider K. Ammash Muthana H. Muhaisin. Advanced model for the effective moment of inertia taking into account shear deformations effect. *Al-Qadisiyah Journal for Engineering Sciences*. 2009. Vyp. 2. № 2. S. 108–128.
5. K. A. Patel et al. Explicit expression for effective moment of inertia of RC beams Latin American. *Journal of Solids and Structures*. 2015. № 12. Pp. 542–560.
6. DSTU B.V.2.7-214: 2009. Betony. Metody vyznachennia mitsnosti za kontrolnymy zrazkami. [Chynnyi vid 2009-12-22]. К. : Minrehionbud Ukrainy, 2010. 43 s. (Natsionalnyi standart Ukrainy).

Kukhniuk O. M., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

APPROXIMATION OF DEFLECTIONS OF FLEXIBLE REINFORCED CONCRETE ELEMENTS IN CONDITIONS OF PURE BENDING

At the current stage, scientists agree that the hysteresis curves of deflection in reinforced concrete beams, at critical points, occur as shown in Figure 1 [1]. The figure shows that beam elements are usually subjected to two deformations: bending and shear (Fig. 1). In the zone of pure bending, only bending deformation occurs, whereas in region 2, where both bending and shear exist, both bending and shear deformations occur. After cracking under the action of an external load, reinforced concrete elements demonstrate a behavior different from that described in the classical theory of elasticity.

Setting the goal and tasks of research. The task is:

1) to demonstrate with the help of standardized methods [6] the possibility of describing the "load – deflection" dependences using linear approximations, in the conditions of pure bending, in the areas preceding the critical loads , P_{cr} , P_y , P_{max} ;

Based on the given methodology and experimental results obtained by the researchers [3] (Table 2), we will establish deflections for linear approximation and make sure of the validity of the simplified (linear) approach for describing these processes.

The given numerical values show that, with sufficient probability, the change in deflections of a flexural reinforced concrete element from the load level P, in different areas, can be described by a linear dependence.

1. The presented results show that when applying a simplified model based on the mathematical apparatus provided in [6], it is possible to describe the development of deflections by rectilinear sections, dividing them into certain stages (sections) that take into account the change in the stiffness of reinforced concrete elements during the formation and development of cracks in reinforced concrete elements

2. This approach allows researchers to significantly simplify practical deformation calculations, and using a mathematically reliable tool.

3. The model is simple and logical, allows experimenters to analytically obtain critical values of the applied load.

4. Indirectly, the presented linearized load-deflection model makes it possible to verify the correctness of the experimental data and the obtained results.

5. Based on the dependencies obtained under experimental conditions, it is easy to find the forces that affect similar structures under real operating conditions.

Keywords: deflection; reinforced concrete elements; concentrated load; deformation diagrams.