

## ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

**Климюк Ю. Є., к.т.н., доцент** (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ МАСОПЕРЕНЕСЕННЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У БАГАТОШАРОВИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Запропоновано математичну модель для прогнозування процесу масоперенесення багатокомпонентних забруднюючих речовин у багатошарових кусково-однорідних ізотропних водонасичених недеформівних пористих середовищах, які мають форму модельних криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, що характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, активної пористості і дифузії. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі. Наведено результати числових розрахунків і здійснено їх аналіз. *Ключові слова:* математична модель, процес масоперенесення, багатокомпонентна речовина, кусково-однорідне середовище.

**Вступ.** Зростаючий техногенний вплив на довкілля приводить до погіршення якості підземних вод, зокрема, ґрунтових, вносить свій суттєвий вплив на загальний стан поверхневих вод [1].

Таким чином, вивчення стану підземних вод, прогнозування його змін та розробка науково-обґрунтованих рекомендацій для прийняття рішень у галузі використання і охорони підземних вод, відтворення їх ресурсів сьогодні є дуже важливим.

**Аналіз останніх досліджень.** Гідрогеоекологічні дослідження все частіше проводяться з використанням математичного моделювання [3; 5; 7-9]. Використання математичних методів моделювання конкретизує розуміння усього, що відбувається з підземними водами, прагматизує оцінки і висновки.

**Методика досліджень.** Процеси масоперенесення забруднюючих речовин у пористих середовищах у випадку переважання конве-

ктивних складових процесу над дифузійними досить часто описуються сингулярно-збуреними крайовими задачами [3; 4]. У [2] розроблено ефективну методику розв'язання просторових сингулярно-збурених крайових задач типу «фільтрація-конвекція-дифузія» для модельних областей, обмежених екіпотенціальними або квазіекіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії. Актуальною залишається задача математичного моделювання та прогнозування просторових процесів масоперенесення багатокомпонентних забруднюючих речовин у багат шарових кусково-однорідних пористих середовищах.

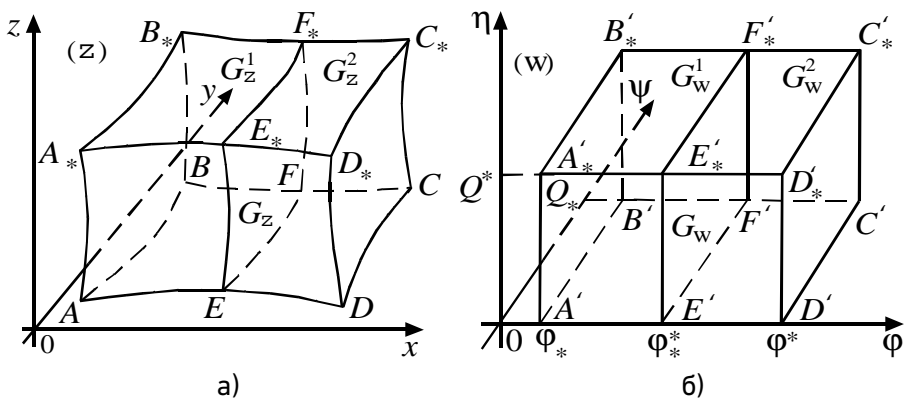


Рис. 1. Двошарова просторова область фільтрації  $G_z$  (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_w$  (б)

**Постановка задачі.** Для області  $G = G_z \times (0, \infty)$  ( $z = (x, y, z)$ ),  $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$  – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома екіпотенціальними поверхнями  $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$  і чотирма поверхнями течії  $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$ ,  $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$ ,  $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$  та розділений деякими заданими екіпотенціальними поверхнями  $E_sF_sF_{*s}E_{*s} = \{z: f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) на деякі  $p$  підобластей  $G_z^1 = ABF_1E_1A_*B_*F_{*1}E_{*1}$ ,  $G_z^s = E_sF_sF_{s+1}E_{s+1}E_{*s}F_{*s}F_{*s+1}E_{*s+1}$  ( $s = \overline{2, p-2}$ ),  $G_z^p = E_{p-1}F_{p-1}CDE_{*p-1}F_{*p-1}C_*D_*$  (рис. 1 а), розглянемо задачу, що описується системою рівнянь:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \text{ div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\text{div}(D_j \cdot \text{grad } C_j) - \vec{v} \cdot \text{grad } C_j - \sum_{k=1}^m a_{j,k} \cdot C_j + \sum_{k=1}^m a_{k,j} \cdot C_k = \sigma \cdot C'_{jt} \quad (j = \overline{1, m}), \quad (x, y, z) \in G_Z^S \quad (s = \overline{1, p}) \quad (2)$$

за наступних крайових умов:

$$\varphi \Big|_{ABB_*A_*} = \Phi_*, \varphi \Big|_{CDD_*C_*} = \Phi_*^*, \quad \Phi_{\vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (3)$$

$$C_j \Big|_{ABB_*A_*} = c_{j*} \text{ або } D_j \cdot C'_j \vec{n} - v_{n*} \cdot (C_j - c_{j*}) \Big|_{ABB_*A_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (4)$$

$$C_j \Big|_{CDD_*C_*} = c_j^* \text{ або } C'_j \vec{n} \Big|_{CDD_*C_*} = 0,$$

$$\text{або } D_j \cdot C'_j \vec{n} - v_n^* \cdot (C_j - c_j^*) \Big|_{CDD_*C_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (5)$$

$$C_j \Big|_{ADD_*A_*} = c_{j**} \text{ або } C'_j \vec{n} \Big|_{ADD_*A_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (6)$$

$$C_j \Big|_{BCC_*B_*} = c_j^{**} \text{ або } C'_j \vec{n} \Big|_{BCC_*B_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (7)$$

$$C_j \Big|_{ABCD} = c_{j***} \text{ або } C'_j \vec{n} \Big|_{ABCD} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (8)$$

$$C_j \Big|_{A_*D_*C_*B_*} = c_j^{***} \text{ або } C'_j \vec{n} \Big|_{A_*B_*C_*D_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (9)$$

початкових умов:

$$C_j \Big|_{t=0} = c_j^0 \quad (j = \overline{1, m}) \quad (10)$$

і умов узгодженості на поверхнях розділу  $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ):

$$\varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \varphi \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} = \Phi_{*s}^*,$$

$$\kappa_s \cdot \Phi'_{\vec{n}} \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = \kappa_{s+1} \cdot \Phi'_{\vec{n}} \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \quad (11)$$

$$C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}}, \quad D_{s,j} \cdot C'_j \vec{n} + v_n^s \cdot C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s-}} = D_{s+1,j} \cdot C'_j \vec{n} + v_n^s \cdot C_j \Big|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s+}} \quad (s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}), \quad (12)$$

де  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  і  $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  – відповідно потенціал і вектор швидкості фільтрації,

$\Phi_* < \varphi < \Phi_*^*$ ,  $0 < \Phi_* = \Phi_{*0}^* < \Phi_{*1}^* < \Phi_{*2}^* < \dots < \Phi_{*p-1}^* < \Phi_{*p}^* = \varphi^* < \infty$ ,  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > 0$ ,  $\kappa$  –

коефіцієнт фільтрації,  $\kappa = \{ \kappa_s, (x, y, z) \in G_Z^S, s = \overline{1, p} \}$ ,  $\kappa_s > 0$  ( $s = \overline{1, p}$ ),

$\vec{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної поверхні;  $C_j = C_j(x, y, z, t)$  –

концентрація  $j$ -тої компоненти багатокомпонентної забруднюючої речовини у фільтраційній течії в точці  $(x, y, z)$  у момент часу  $t$ ,  $D_j$  – власний коефіцієнт дифузії  $j$ -тої компоненти багатокомпонентної забруднюючої речовини у фільтраційній течії,  $D_j = \left\{ D_{s,j}, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $D_{s,j} = \varepsilon \cdot d_{s,j}$ ,  $d_{s,j} > 0$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ),  $\varepsilon$  – малий параметр ( $\varepsilon > 0$ ),  $\sigma$  – коефіцієнт активної пористості,  $\sigma = \left\{ \sigma_s, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $0 < \sigma_s < 1$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $a_{j,k}$  – коефіцієнт, що характеризує швидкість протікання масообмінних процесів між  $j$ -тою і  $k$ -тою компонентами забруднюючої речовини у фільтраційному розчині,  $a_{j,k} = \left\{ a_{s,j,k}, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $a_{s,j,k} = \begin{cases} \varepsilon \cdot \bar{a}_{s,j,k}(x, y, z, t), & j \neq k, \\ 0, & j = k, \end{cases}$   $\bar{a}_{s,j,k}(x, y, z, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ) – неперервні обмежені функції,  $c_{j^{**}} = \left\{ c_{s,j^{**}}, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $c_j^{**} = \left\{ c_{s,j}^{**}, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $c_{j^{***}} = \left\{ c_{s,j^{***}}, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $c_j^{***} = \left\{ c_{s,j}^{***}, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $c_j^0 = \left\{ c_{s,j}^0, (x, y, z) \in G_Z^s, s = \overline{1, p} \right\}$ ,  $c_{j^*} = c_{j^*}(M, t)$ ,  $c_j^* = c_j^*(M, t)$ ,  $c_{s,j^{**}} = c_{s,j^{**}}(M, t)$ ,  $c_{s,j}^{**} = c_{s,j}^{**}(M, t)$ ,  $c_{s,j^{***}} = c_{s,j^{***}}(M, t)$ ,  $c_{s,j}^{***} = c_{s,j}^{***}(M, t)$ ,  $c_{s,j}^0 = c_{s,j}^0(x, y, z)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ) – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області  $G$  [2; 4],  $M$  – довільна точка відповідної поверхні,  $v_{n^*}$ ,  $v_n^*$  і  $v_n^s$  – нормальні складові швидкості відповідно на поверхнях  $ABB_*A_*$ ,  $CDD_*C_*$  і  $E_sF_sF_*E_*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ).

Шляхом введення пари функцій  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжених із функцією  $\varphi(x, y, z)$ ) таких, що  $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$  [6] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови:  $\psi|_{ADD_*A_*} = 0$ ,  $\psi|_{BCC_*B_*} = Q_*$ ,  $\eta|_{ABCD} = 0$ ,  $\eta|_{A_*B_*C_*D_*} = Q^*$ , задача (1), (3), (11) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення області  $G_Z$  на область комплексного по-

тенціалу – прямокутний паралелепіпед  $G_w = A'B'C'D'A'_*B'_*C'_*D'_*$ , який розділений поверхнями  $E'_s F'_s E'_{*s} F'_{*s}$  ( $s = \overline{1, p}$ ) на  $p$  підобластей  $G_w^1 = A'B'E'_1 F'_1 A'_* B'_* E'_{*1} F'_{*1}$ ,  $G_w^s = E'_s F'_s F'_{s+1} E'_{s+1} E'_{*s} F'_{*s} F'_{*s+1} E'_{*s+1}$  ( $s = \overline{2, p-2}$ ),  $G_w^p = E'_{p-1} F'_{p-1} C'D'E'_{*p-1} F'_{*p-1} C'_* D'_*$  (рис. 1 б), де  $G_w^s = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(s-1)}^* < \varphi < \varphi_{*s}^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q_*^*\}$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$  – невідомі параметри,  $Q = Q_* \cdot Q^*$  – повна фільтраційна витрата.

Припустимо, що ця задача є розв'язаною [2], зокрема, знайдено поле швидкостей  $\vec{v}$  і параметри  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q_*$ ,  $Q^*$ ,  $Q$  та ряд інших величин. Здійснивши заміну змінних  $x = x(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \eta)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \eta)$  у рівнянні (2) та умовах (4) – (10), (12), отримаємо відповідну «дифузійну задачу» для області  $G_w \times (0, \infty)$ :

$$D_j \cdot (b_1 \cdot c''_j \varphi \varphi + b_2 \cdot c''_j \psi \psi + b_3 \cdot c''_j \eta \eta + b_4 \cdot c'_j \psi + b_5 \cdot c'_j \eta) - \kappa \cdot b_1 \cdot c'_j \varphi - \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{j,k} \cdot c_j + \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{k,j} \cdot c_k = \sigma \cdot c'_{j_t} \quad (j = \overline{1, m}), \quad (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s \quad (s = \overline{1, p}) \quad (13)$$

$$c_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_{j^*} \quad \text{або} \quad D_j \cdot c'_j \varphi - \kappa \cdot (c_j - \tilde{c}_{j^*}) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (14)$$

$$c_j \Big|_{\varphi=\varphi_*} = \tilde{c}_j^* \quad \text{або} \quad c'_j \varphi \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0,$$

$$\text{або} \quad D_j \cdot c'_j \varphi - \kappa \cdot (c_j - \tilde{c}_j^*) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (15)$$

$$c_j \Big|_{\psi=0} = \tilde{c}_{j^{**}} \quad \text{або} \quad c'_j \psi \Big|_{\psi=0} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (16)$$

$$c_j \Big|_{\psi=Q_*} = \tilde{c}_{j^{**}} \quad \text{або} \quad c'_j \psi \Big|_{\psi=Q_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (17)$$

$$c_j \Big|_{\eta=0} = \tilde{c}_{j^{***}} \quad \text{або} \quad c'_j \eta \Big|_{\eta=0} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (18)$$

$$c_j \Big|_{\eta=Q_*} = \tilde{c}_{j^{***}} \quad \text{або} \quad c'_j \eta \Big|_{\eta=Q_*} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (19)$$

$$c_j \Big|_{t=0} = \tilde{c}_j^0 \quad (j = \overline{1, m}), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* - 0} c_j &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* + 0} c_j, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* - 0} (D_{s,j} \cdot c'_j \varphi - \kappa_s \cdot c_j) = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* + 0} (D_{s+1,j} \cdot c'_j \varphi - \kappa_{s+1} \cdot c_j) \quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}), \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$c_j = c_j(\varphi, \psi, \eta, t) = C_j(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_{j*} = \tilde{c}_{j*}(\psi, \eta, t) = c_{j*}(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_j^* = \tilde{c}_j^*(\psi, \eta, t) = c_j^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_{j**} = \left\{ \tilde{c}_{s,j**}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\}, \quad \tilde{c}_j^{**} = \left\{ \tilde{c}_{s,j}^{**}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\},$$

$$\tilde{c}_{j***} = \left\{ \tilde{c}_{s,j***}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\}, \quad \tilde{c}_j^{***} = \left\{ \tilde{c}_{s,j}^{***}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\},$$

$$\tilde{c}_j^0 = \left\{ \tilde{c}_{s,j}^0, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$\tilde{c}_{s,j**} = \tilde{c}_{s,j**}(\varphi, \eta, t) = c_{s,j**}(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_{s,j}^{**} = \tilde{c}_{s,j}^{**}(\varphi, \eta, t) = c_{s,j}^{**}(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_{s,j***} = \tilde{c}_{s,j***}(\varphi, \psi, t) = c_{s,j***}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0), t),$$

$$\tilde{c}_{s,j}^{***} = \tilde{c}_{s,j}^{***}(\varphi, \psi, t) = c_{s,j}^{***}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*), t),$$

$$\tilde{c}_{s,j}^0 = \tilde{c}_{s,j}^0(\varphi, \psi, \eta) = c_{s,j}^0(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \quad (s = \overline{1, p}),$$

$$\tilde{a}_{j,k} = \left\{ \tilde{a}_{s,j,k}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\} \quad (j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}),$$

$$\tilde{a}_{s,j,k} = \varepsilon \cdot \tilde{a}_{s,j,k}, \quad \tilde{a}_{s,j,k} = \tilde{a}_{s,j,k}(\varphi, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, m}),$$

$$\tilde{v} = \left\{ \tilde{v}_s, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\}, \quad \tilde{v}_s = \tilde{v}_s(\varphi, \psi, \eta) \quad (s = \overline{1, p}),$$

$$b_r = \left\{ b_{r,s}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\}, \quad b_{r,s} = b_{r,s}(\varphi, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1, 5}, s = \overline{1, p}),$$

$$b_{1,s} = \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2 = \tilde{v}_s^2 \cdot \kappa_s^{-2}, \quad b_{2,s} = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2,$$

$$b_{3,s} = \eta_x''^2 + \eta_y''^2 + \eta_z''^2, \quad b_{4,s} = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}'', \quad b_{5,s} = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}'' \quad [2].$$

**Алгоритм розв'язання задачі.** Аналогічно до [2] числово-асимптотичне наближення  $c_j = \left\{ c_{s,j}, (\varphi, \psi, \eta) \in G_w^s, s = \overline{1, p} \right\} \quad (j = \overline{1, m})$  розв'язку задачі (13) – (21) з точністю  $O(\varepsilon^{n+1})$  знайдено у вигляді рядів:

$$c_{s,j} = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{s,j,i} + I(s,1) \cdot \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{P}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot \tilde{\tilde{P}}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{P}_{s,j,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \widehat{\widehat{P}}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{P}}}_{s,j,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{\tilde{\tilde{\tilde{P}}}}_{s,j,i} + R_{s,j,n+1} \quad (s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}),$$

де  $c_{s,j,i} = c_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ) – члени регулярних частин асимптотик,  $\tilde{P}_{p,j,i} = \tilde{P}_{p,j,i}(\tilde{\varphi}_p, \psi, \eta, t)$  ( $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) – функції типу примежового шару в околі  $\varphi = \varphi^*$  (поправки на виході модельної області),  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\varphi}_{s-1}, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{2, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) і  $\tilde{P}_{s,i} = \tilde{P}_{s,i}(\tilde{\varphi}_s, \psi, \eta, t)$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) – функції типу примежового шару в околах  $\varphi = \varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) (поправки в околах поверхонь розділу),  $\hat{P}_{s,j,i} = \hat{P}_{s,j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\hat{\tilde{P}}_{s,j,i} = \hat{\tilde{P}}_{s,j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$ ,  $\check{P}_{s,j,i} = \check{P}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ,  $\check{\tilde{P}}_{s,j,i} = \check{\tilde{P}}_{s,j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, 2n+1}$ ) – функції типу примежового шару відповідно в околах  $\psi = 0$ ,  $\psi = Q_*$ ,  $\eta = 0$ ,  $\eta = Q^*$  (поправки на бічних гранях),  $\tilde{\varphi}_s = \frac{\varphi - \varphi_{*s}^*}{\varepsilon}$

$$(s = \overline{0, p-1}), \quad \tilde{\varphi}_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi}{\varepsilon} \quad (s = \overline{1, p}), \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\psi} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$\tilde{\eta} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$  – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги),

$R_{s,j,n+1} = R_{s,j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ) – залишкові члени,

$$I(a, b) = \begin{cases} 1, & a \geq b, \\ 0, & a < b. \end{cases} \quad \text{Зокрема, при першій з крайових умов (14) для зна-$$

ходження  $c_{s,j,i}$  ( $s = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ) одержано формули:

$$c_{1,j,0} = \begin{cases} \tilde{c}_{1,j^*}(\psi, \eta, t - \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_1, \\ \tilde{c}_{1,j}^0(\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < \tilde{f}_1 \end{cases} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$c_{1,j,i} = \begin{cases} \kappa_1 \cdot \int_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{g_{1,j,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_1(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}_1^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi}, & t \geq \tilde{f}_1, \\ \sigma_1^{-1} \cdot \int_0^t g_{1,j,i}(\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{t} + \tilde{f}_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \tilde{f}_1 \end{cases}$$

$$(j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$c_{s,j,0} = \begin{cases} c_{s-1,j,0}(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta, t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq \tilde{f}_s, \\ \tilde{c}_{s-1,j}^0(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t), \psi, \eta), & t < \tilde{f}_s, \end{cases}$$

$$c_{s,j,i} = \begin{cases} h_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq \tilde{f}_s, \\ \sigma_s^{-1} \cdot \int_0^t g_{s,j,i}(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t), \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \tilde{f}_s \end{cases}$$

$$(s = \overline{2, p}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

де  $h_{s,j,i} = \kappa_s \cdot \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \frac{g_{s,j,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, \tilde{f}_s(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) + t - \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}_s^2(\tilde{\varphi}, \psi, \eta)} d\tilde{\varphi} + c_{s-1,j,i} \Big|_{\varphi=\varphi_{*(s-1)}^*}$

$$(s = \overline{2, p}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), g_{s,j,i} = d_{s,j} \cdot (b_{1,s} \cdot c_{(s,j,i-1)}'' \varphi \varphi + b_{2,s} \cdot c_{(s,j,i-1)}'' \psi \psi + b_{3,s} \cdot c_{(s,j,i-1)}'' \eta \eta + b_{4,s} \cdot c_{(s,j,i-1)}' \psi + b_{5,s} \cdot c_{(s,j,i-1)}' \eta) + \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,j,k} \cdot c_{s,j,i-1} -$$

$$- \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{s,k,j} \cdot c_{s,k,i-1} \quad (s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \tilde{f}_s = \tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) = \kappa_s \cdot \sigma_s \times$$

$$\times \int_{\varphi_{*(s-1)}^*}^{\varphi} \tilde{v}_s^{-2}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta) d\tilde{\varphi} - \text{час проходження відповідною частинкою шляху}$$

від точки  $(x(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*(s-1)}^*, \psi, \eta)) \in G_z^{s-1}$  до точки

$(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_z^s$  вздовж відповідної лінії течії,  $\tilde{f}_s^{-1}$  –

функція, обернена відповідно до  $\tilde{f}_s$  відносно змінної  $\varphi$  ( $s = \overline{1, p}$ ). При

другій з крайових умов (14) для знаходження головних частин  $c_{s,j,0}$

( $s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}$ ) отримано такі ж вирази, а для знаходження попра-

вок  $c_{s,j,i}$  ( $s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$ ) відповідні формули матимуть ви-

гляд:

$$c_{s,j,i} = \begin{cases} h_{s,j,i}(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq \tilde{f}_s, \\ \sigma_s^{-1} \cdot \int_0^t g_{s,j,i}(\tilde{f}_s^{-1}(\tilde{f}_s(\varphi, \psi, \eta) - t), \psi, \eta, \tilde{t}) d\tilde{t}, & t < \tilde{f}_s \end{cases}$$

$$(s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$



де  $h_{s,j,i} = \kappa_s \cdot \int_{\Phi_{*(s-1)}}^{\Phi} \frac{g_{s,j,i}(\widehat{\Phi}, \Psi, \eta, \tilde{f}_s(\widehat{\Phi}, \Psi, \eta) + t - \tilde{f}_s(\Phi, \Psi, \eta))}{\tilde{v}_s^2(\widehat{\Phi}, \Psi, \eta)} d\widehat{\Phi} + d_{s,j,0} \times$   
 $\times c'_{(s,j,i-1)} \Big|_{\Phi=\Phi_{*(s-1)}} \quad (s = \overline{1, p}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}).$

Для знаходження  $\tilde{P}_{p,j,i}$  ( $j = \overline{1, m}, i = \overline{0, n+1}$ ) при першій з крайових умов (15) отримано наступні формули:

$$\tilde{P}_{p,j,0} = \left( \tilde{c}_{p,j}^* - c_{p,j,0} \Big|_{\tilde{\Phi}_p=0} \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\Phi}_p},$$

$$\tilde{P}_{p,j,i} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\Phi}_p} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} \cdot \int_0^{\widehat{\Phi}} q_{2,p,j,n+1}(\widehat{\Phi}, \Psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} d\widehat{\Phi} - \right. \\ \left. - c_{p,j,i} \Big|_{\tilde{\Phi}_p=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\Phi}_p} \quad (i = \overline{1, n}), \right) d\widehat{\Phi} -$$

$$\tilde{P}_{p,j,n+1} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\Phi}_p} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} \cdot \int_0^{\widehat{\Phi}} q_{2,p,j,n+1}(\widehat{\Phi}, \Psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} d\widehat{\Phi} \right) d\widehat{\Phi},$$

при другій з крайових умов (15):

$$\tilde{P}_{p,j,0} = \frac{d_{p,j}}{\kappa_p} \cdot c'_{(p,j,0)} \Big|_{\tilde{\Phi}_p=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\Phi}_p},$$

$$\tilde{P}_{p,j,i} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\Phi}_p} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} \cdot \int_0^{\widehat{\Phi}} q_{2,p,j,i}(\widehat{\Phi}, \Psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} d\widehat{\Phi} - \right. \\ \left. - \frac{d_{p,j}}{\kappa_p} \cdot c'_{(p,j,i)} \Big|_{\tilde{\Phi}_p=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\Phi}_p} \quad (i = \overline{1, n}), \right) d\widehat{\Phi} -$$

$$\tilde{P}_{p,j,n+1} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\Phi}_p} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} \cdot \int_0^{\widehat{\Phi}} q_{2,p,j,n+1}(\widehat{\Phi}, \Psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \widehat{\Phi}} d\widehat{\Phi} \right) d\widehat{\Phi}$$

і при третій з крайових умов (15):

$$P_{p,j,0} = \frac{1}{2 \cdot \kappa_p} \cdot \left( \kappa_p \cdot c_j^* - d_{p,j} \cdot c'_{(p,j,0)} \tilde{\varphi} - \kappa_p \cdot c_{p,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}=0} \cdot e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\varphi}} \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$P_{p,j,i} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\varphi}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{2,p,j,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\varphi}} d\hat{\varphi} - \right.$$

$$\left. - \left( d_{p,j} \cdot c'_{(p,j,i)} \tilde{\varphi} + \kappa_p \cdot c_{p,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}=0} \right) d\hat{\varphi} \quad (j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$P_{p,j,n+1} = \frac{1}{d_{p,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left( e^{-\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\varphi}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{2,p,j,n+1}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_p}{d_{p,j}} \tilde{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} \quad (j = \overline{1, m}),$$

а для знаходження  $\tilde{P}_{s,j,i}$ , ( $s = \overline{2, p}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) і  $\tilde{P}_{s,j,i}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $i = \overline{0, n+1}$ ) отримано наступні вирази:

$$\tilde{P}_{s+1,j,0} = \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left( \left( -d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,0)} \tilde{\varphi}_s + \kappa_s \cdot c_{s,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - \right.$$

$$\left. - \left( d_{s+1,j} \cdot c'_{(s+1,j,0)} \tilde{\varphi}_s + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1,j}} \tilde{\varphi}_s} \quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}),$$

$$\tilde{P}_{s+1,j,i} = \frac{1}{d_{s+1,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}_s} \left( e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1,j}} \tilde{\varphi}} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} q_{1,s,j,i}(\hat{\varphi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1,j}} \tilde{\varphi}} d\hat{\varphi} \right) d\hat{\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left( \left( -d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,i)} \tilde{\varphi}_s + \kappa_s \cdot c_{s,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} - \right.$$

$$\left. - \left( d_{s+1,j} \cdot c'_{(s+1,j,i)} \tilde{\varphi}_s + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\varphi}_s=0} \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1,j}} \tilde{\varphi}_s}$$

$$(s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}),$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{s+1,j,n+1} &= \frac{1}{d_{s+1,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left( e^{-\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1,j}} \hat{\phi}} \cdot \int_0^{\hat{\phi}} q_{1,s,j,n+1}(\hat{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_{s+1}}{d_{s+1,j}} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi} \\ &\quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}), \\ \tilde{P}_{s,j,0} &= \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left( \left( -d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,0)} \tilde{\phi}_s + \kappa_s \cdot c_{s,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\ &\quad \left. - \left( d_{s+1,j} \cdot c'_{(s+1,j,0)} \tilde{\phi}_s + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,0} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}_s} \quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}), \\ \tilde{P}_{s,j,i} &= \frac{1}{d_{s,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left( e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \hat{\phi}} \cdot \int_0^{\hat{\phi}} q_{2,s,j,i}(\hat{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi} + \\ &\quad + \frac{1}{2(\kappa_{s+1} - \kappa_s)} \cdot \left( \left( -d_{s,j} \cdot c'_{(s,j,i)} \tilde{\phi}_s + \kappa_s \cdot c_{s,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} - \right. \\ &\quad \left. - \left( d_{s+1,j} \cdot c'_{(s+1,j,i)} \tilde{\phi}_s + \kappa_{s+1} \cdot c_{s+1,j,i} \right) \Big|_{\tilde{\phi}_s=0} \right) \cdot e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \tilde{\phi}_s} \\ &\quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}), \\ \tilde{P}_{s,j,n+1} &= \frac{1}{d_{s,j}} \cdot \int_0^{\tilde{\phi}_s} \left( e^{\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \hat{\phi}} \cdot \int_0^{\hat{\phi}} q_{2,s,j,n+1}(\hat{\phi}, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_s}{d_{s,j}} \hat{\phi}} d\hat{\phi} \right) d\hat{\phi} \\ &\quad (s = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, m}), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} q_{1,s,j,i} &= b_{1,s}^{-1}(\Phi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \left( I(i, 1) \cdot \left( \sigma_s \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-1)} t - \sum_{l=1}^i \tilde{B}_{1,s,l} \cdot \left( d_{s,j} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-l)} \tilde{\phi}_s \tilde{\phi}_s - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-l)} \tilde{\phi}_s \right) \right) - I(i, 2) \cdot d_{s,j} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left( \tilde{B}_{2,s,l} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-2-l)} \psi \psi + \tilde{B}_{3,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)} \psi + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{B}_{4,s,l} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-2-l)} \eta \eta + \tilde{B}_{5,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)} \eta \right) + I(i, 2) \cdot \left( \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{s,j,k,l} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-2-l} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{s,k,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,k,i-2-l} \Big) \Big), \quad q_{2,s,j,i} = b_{1,s}^{-1}(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \cdot \left( I(i,1) \cdot \left( \sigma_s \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-1)t} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sum_{l=1}^i \tilde{B}_{1,s,l} \cdot \left( d_{s,j} \cdot \tilde{P}''_{(s,j,i-l)\tilde{\phi}_s\tilde{\phi}_s} + \kappa_s \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-l)\tilde{\phi}_s} \right) \right) - I(i,2) \cdot d_{s,j} \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left( \tilde{B}_{2,s,l} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \tilde{P}''_{(s,j,i-2-l)\psi\psi} + \tilde{B}_{3,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)\psi} + \tilde{B}_{4,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)\eta\eta} + \tilde{B}_{5,s,l} \cdot \tilde{P}'_{(s,j,i-2-l)\eta} \right) + \right. \\
 & \left. + I(i,2) \cdot \left( \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{s,j,k,l} \cdot \tilde{P}_{s,j,i-2-l} - \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{k=1}^m \tilde{A}_{s,k,j,l} \cdot \tilde{P}_{s,k,i-2-l} \right) \right) \left( s = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,m}, \right. \\
 & \left. i = \overline{0,n+1} \right), \quad \tilde{B}_{r,s,l} \quad (r = \overline{1,5}, s = \overline{2,p}), \quad \tilde{A}_{s,j,k,l} \quad (s = \overline{2,p}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,m}) \quad \text{і} \\
 & \tilde{B}_{r,s,l} \quad (r = \overline{1,5}, s = \overline{1,p}), \quad \tilde{A}_{s,j,k,l} \quad (s = \overline{1,p}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,m}) - \text{коефіцієнти} \\
 & \text{при } l\text{-тих степенях } \varepsilon \text{ у розкладі відповідно функцій} \\
 & b_{r,s}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon\tilde{\phi}_s, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1,5}, s = \overline{2,p}), \quad \tilde{a}_{s,j,k}(\varphi_{*s}^* - \varepsilon\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{2,p}, \\
 & j = \overline{1,m}, k = \overline{1,m}) \quad \text{і} \quad b_r(\varphi_{*s}^* + \varepsilon\tilde{\phi}_s, \psi, \eta) \quad (r = \overline{1,5}, s = \overline{1,p}), \\
 & \tilde{a}_{s,j,k}(\varphi_{*s}^* + \varepsilon\tilde{\phi}_s, \psi, \eta, t) \quad (s = \overline{1,p}, j = \overline{1,m}, k = \overline{1,m}) \text{ у ряд Тейлора в околі} \\
 & \varphi = \varphi_{*s}^* \quad (s = \overline{1,p}).
 \end{aligned}$$

**Числові розрахунки.** У ході проведення комп'ютерного експерименту здійснено моделювання процесу масоперенесення деякої двохкомпонентної забруднюючої речовини у двошаровому кусково-однорідному пористому середовищі, що характеризується різними коефіцієнтами фільтрації  $\kappa_1 = 0,45$  м/добу,  $\kappa_2 = 0,3$  м/добу, активної пористості  $\sigma_1 = 0,7$ ,  $\sigma_2 = 0,5$  і власної дифузії  $D_{1,1} = 0,0008$  м<sup>2</sup>/добу,  $D_{1,2} = 0,0005$  м<sup>2</sup>/добу,  $D_{2,1} = 0,0006$  м<sup>2</sup>/добу,  $D_{2,2} = 0,0003$  м<sup>2</sup>/добу, на ідеальному фільтраційному фоні для області  $G_z$ , яка обмежена наступними поверхнями:  $f_1(x, y, z) = (x + 20,95828)^2 + y^2 + z^2 - 8822,56088$ ,  $f_2(x, y, z) = (x - 420,95828)^2 + y^2 + z^2 - 8822,56088$ ,  $f_3(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y - 615,53671)^2 + z^2 - 418885,4382$ ,  $f_4(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y + 615,53671)^2 + z^2 - 418885,4382$ ,  $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 400) + y^2 + z^2)^2 + 160000y^2 - 932548,33996z^2$  і розділена поверхнею  $f_7^*(x, y, z) = (x + 232,79068)^2 + y^2 + z^2 - 147307,77507$  на дві підобла-

сті. При цьому побудовано розрахункову динамічну сітку  $G_z$  при  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 49$ ,  $n = n_1 + n_2 = 20$ ,  $n_1 = n_2 = 10$ ,  $m = 7$ ,  $l = 7$  (параметри  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $m$  і  $l$  вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату  $Q = 1,83 \text{ м}^3/\text{добу}$ , потенціал на поверхні розділу  $\varphi_*^* = 26,88$  та обчислено величини швидкостей фільтрації  $|v|$  та  $b_r$  ( $r = \overline{1,5}$ ), що відповідають величині середньої швидкості руху води вздовж двошарового пористого середовища  $1 \text{ м}/\text{добу}$ .

На рис. 2 зображено розподіли середніх величин концентрацій  $c_{1 \text{ сер}}(\varphi, t)$  і  $c_{2 \text{ сер}}(\varphi, t)$  двокомпонентної забруднюючої речовини вздовж області  $G_z$  при  $c_1^0 = 0$ ,  $c_2^0 = 0$ ,  $c_{1*} = 0,017 \cdot (1 - 0,5 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0,1 \cdot (\psi^2 + \eta^2)})$ ,  $c_{2*} = 0,017 \cdot (1 - 0,5 \cdot \cos(t) \cdot e^{-0,1 \cdot (\psi^2 + \eta^2)})$ ,  $\tilde{a}_{1,2,1} = 0,002$ ,  $\tilde{a}_{2,2,1} = 0,001$ .

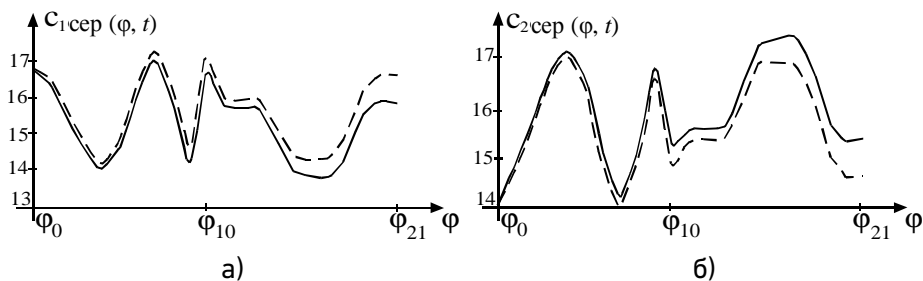


Рис. 2. Розподіли середніх величин концентрацій  $c_{1 \text{ сер}}(\varphi, t)$  і  $c_{2 \text{ сер}}(\varphi, t)$  двокомпонентної забруднюючої речовини вздовж двошарового пористого середовища (суцільна і штрихова лінії відповідають варіантам врахування і неврахування взаємодії компонент між собою)

**Висновки.** У роботі сформовано математичну модель типу «фільтрація – конвекція – дифузія», що призначена для прогнозування процесу масоперенесення багатокомпонентних забруднюючих речовин у багатшарових кусково-однорідних пористих середовищах – модельних областях, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, що характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, активної пористості і власної дифузії. Для перевірки її коректності побудовано числово-асимптотичне розв'язання розв'язку відповідної сингулярно-збуреної задачі. Проведений чис-

ловий експеримент підтверджує необхідність врахування масообмінних процесів при дослідженні явищ масоперенесення багатоконпонентних забруднюючих речовин у багат шарових кусково-однорідних пористих середовищах. Водночас отримано нового типу поправки в числово-асимптотичному наближенні розв'язку відповідної сингулярно-збуреної задачі з розривними коефіцієнтами, що характеризують механізм конвективно-дифузійного перерозподілу концентрацій в околах ділянок розділу шарів.

**1.** Абрамов И. Б. Оценка воздействия на подземные воды промышленно-городских агломераций и экологическая безопасность / И. Б. Абрамов. – Х. : ХНУ им. В.Н. Каразина, 2007. – 283 с. **2.** Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: монографія / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне : ТзОВ фірма «Ассоль», 2014. – 273 с. **3.** Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечський. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с. **4.** Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 254 с. **5.** Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с. **6.** Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат. – 1967. – 390 с. **7.** Шестаков В. М. Гидрогеодинамика / В. М. Шестаков. – М. : МГУ, 1995. – 368 с. **8.** Эмих В. Н. Гидродинамика фильтрационных течений с дренажом / В. Н. Эмих. – Новосибирск : Наука, 1993. – 213 с. **9.** Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht et al. : Kluwer, 1990. – 533 p.

Рецензент: д. т. н., проф. Бомба А. Я. (РДГУ)

---

**Klymiuk Y. Y., Candidate of Engineering, Associate Professor (Rivne State University of Humanities, Rivne)**

## **MATHEMATICAL MODELLING OF THE PROCESSES OF MASS TRANSFER MULTICOMPONENT POLLUTANTS IN MULTILAYER PIECEWISE-HOMOGENEOUS POROUS MEDIA**

**A mathematical model to predict the process of the mass transfer of multicomponent pollutants in the multilayer piecewise-homogeneous isotropic water saturated not deformable porous media, which have**

the form of the model curvilinear parallelepiped, bounded two equipotential surfaces and four surfaces flow, separated by some specified of the equipotential surfaces on several subdomains, which are characterized by different coefficients of filtration, active porosity and diffusion, is constructed. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem is developed. The results of numerical calculations and conducted their analysis.

**Keywords:** mathematical model, process of the mass transfer, multicomponent substance, piecewise-homogeneous medium.

---

**Климюк Ю. Е., к.т.н., доцент** (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно)

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МАССОПЕРЕНОСА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В МНОГОСЛОЙНЫХ КУСОЧНО- ОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

Предложена математическая модель для прогнозирования процесса массопереноса многокомпонентных загрязняющих веществ в многослойных кусочно-однородных изотропных водонасыщенных недеформируемых пористых средах, которые имеют форму модельных криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения и разделенных некоторыми заданными эквипотенциальными поверхностями на несколько подобластей, характеризующихся различными коэффициентами фильтрации, активной пористости и диффузии. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи. Приведены результаты численных расчетов и осуществлен их анализ.

**Ключевые слова:** математическая модель, процесс массопереноса, многокомпонентное вещество, кусочно-однородная среда.

---