

Човнюк Ю. В., к.т.н., доцент, Іванов Є. О. (Національний авіаційний університет, м. Київ, uchovnyuk@ukr.net, shifango@ukr.net),
Чередніченко П. П., доцент, Кравчук В. Т., к.т.н., доцент,
Остапущенко О. П., к.т.н., доцент, Кравченко І. М. (Київський національний університет будівництва і архітектури, petro_che@ukr.net, vtk1@ukr.net, olga_ost_17@ukr.net, kim-ua@i.ua)

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД В АНАЛІЗІ ТЕРМОНАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ МЕТАЛОКОНСТРУКЦІЙ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ КРАНІВ ПРИ ЗОСЕРЕДЖЕНОМУ НАГРІВАННІ

Запропоновано чисельно-аналітичний підхід у аналізі термо-напружено-деформованого стану металокопункцій вантажопідйомних кранів при їх зосередженому нагріванні. Розв'язано плоску та об'ємну (тривісний напружений стан) задачі. Встановлено основні компоненти деформацій для обох задач. Використано методи математичної фізики та інтегральних перетворень Лапласа, Ханкеля. Аналітичні результати, отримані у роботі, перевірено чисельними розрахунками на ПЕОМ, які встановлюють доволі неоднорідний характер деформування та зміни компонент термонапруженого стану пластини під дією розміщеного на її поверхні зосередженого джерела тепла. Зокрема, для деяких компонент напружень (стискування – розтяг) як по глибині/товщині пластини, так і по радіусі від осі знаходження джерела тепла. Це, по суті, означає, що наявність подібних ефектів з плином часу (навіть у пружній постановці) призводить до появи тріщин, які неминуче наближають процеси старіння та руйнування металокопункцій вантажопідйомних кранів.

Задачу з визначення та аналізу напруженого стану пластини (елементу металокопункції кранів) при нагріванні зосередженим джерелом тепла розглянуто й розвинуто у пружній постановці методами математичної фізики. При цьому застосовано для розв'язку рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат перетворення Лапласа по часу й Ханкеля по радіальній координаті.

Ключові слова: чисельно-аналітичний підхід; аналіз; термонапружено-деформований стан; металокопункції; вантажопідйомний кран; зосереджене поверхнєве нагрівання.

Постановка проблеми. Слід зазначити, що зварювання як технологічний процес з'єднання металів раніше викликало сумніви й недовіру конструкторів та технологів, проте ці часи давно минули. Воно настільки міцно увійшло у практику будівництва, машинобудування та інших галузей промисловості, що зараз виготовлення будівельних конструкцій, конструкцій хімічного машинобудування, корпусів кораблів, літаків, ракет, металоконструкцій вантажопідйомних кранів та багатьох інших виробів без застосування зварювання просто неможливе. Варто зазначити, що цей технологічний процес, крім переваг, має й цілу низку особливостей, котрі потрібно враховувати у процесі розрахунку, проєктування та виготовлення конструкцій (металоконструкцій) за допомогою зварювання. Супутнє зварюванню температурне поле суттєво нагріває метал. При цьому, як правило, укрупнюється його структура і, як наслідок, втрачається міцність. Відхилення у технології зварювання викликають появу гарячих та холодних тріщин, непроварів, різного роду включень у метал, який зварюють. Деформації елементів конструкцій, які з'являються після зварювання, призводять до необхідності правлення їх перед складальними операціями.

З наведеного вище стає зрозумілим, наскільки важливо для раціонального проєктування металоконструкції (вантажопідйомного крану) й розробки технології її виготовлення вміти розрахунковим шляхом оцінювати вплив дефектів, початкових деформацій та напружень, залишкових напружень (у сполученні із зовнішнім навантаженням) на геометрію конструкції та її несучу здатність. Від успіхів у розвитку цієї області науки багато у чому залежать як технологія виготовлення конкретного виробу, так і його подальша доля при випробуваннях й наступній реальній експлуатації.

Аналіз останніх публікацій по темі дослідження. Особливості конструкцій, які зварюються, насамперед визначаються температурним полем, викликаним термонапружено-деформованим станом самої металоконструкції.

У роботах [1–15] наведені підходи й методи розрахунку температурних полів, компонент напружено-деформованого стану металоконструкцій при зварюванні, що базуються на класичних методах математичної фізики. У вказаних роботах з'ясовані принципи керування цими температурними полями, що суттєво знижує негативний вплив їх, як і наслідків таких впливів. Тому дуже важливо вміти правильно розраховувати як температурні поля, так і зв'язані з ними

компоненти термонапружено-деформованого стану металокопструкцій (кранів), виявляти основні параметри, котрі на них впливають й, вміло керуючи ними, зводити до мінімуму їх шкідливі наслідки.

У цьому дослідженні будуть частково використані результати робіт, цитованих вище.

Мета роботи полягає у обґрунтуванні чисельно-аналітичного підходу в аналізі термонапружено-деформованого стану металокопструкцій вантажопідйомних кранів при їх поверхневому зосередженому нагріванні джерелом тепла. У якості останнього можуть виступати або дуга зварювання, або промінь лазера.

Виклад основного змісту дослідження

1. Температурне поле джерела тепла, що знаходиться на поверхні пластини скінченної товщини δ .

У роботі [1] були розглянуті температурні поля, що виникають від дії джерел тепла, прикладених миттєво. Якщо ж джерело діє протягом деякого скінченного проміжку часу $t \in [0, t_0]$, тоді температуру у тілі можна підрахувати, подаючи дію джерела як послідовність нескінченно великого числа миттєвих джерел, час спрацювання котрих рівномірно розподілений по відріжку часу $[0, t_0]$.

Використаємо поняття теплової потужності джерела q_t , Вт, й подамо елементарну кількість тепла dQ , Дж, введеного у тіло елементарним (миттєвим) джерелом протягом елементарного (нескінченно малого) проміжку часу $d\tau$, у вигляді $dQ = q_t \cdot d\tau$.

У випадку точкового джерела, діючого у пластині скінченної товщини (δ) на її поверхні ($z = 0$), кожний такий елементарний елемент джерела тепла потужністю q_t підвищить температуру пластини на величину (у циліндричній системі координат (r, φ, z)):

$$d\theta = \frac{q_t}{2\pi\lambda_0\delta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(z) \cdot A(0)}{\beta_n} \times \exp\left[-\frac{r^2}{4a(t-\tau)} - a \cdot \frac{\mu_n^2}{\delta^2}(t-\tau)\right] \cdot \frac{d\tau}{(t-\tau)}. \quad (1)$$

У (1) введені наступні позначення: λ_0 – теплопровідність матеріалу у початковий момент (до нагрівання джерелом тепла); a – ко-

ефіцієнт температуропровідності, θ – температура матеріалу; μ_n – визначається з трансцендентного рівняння:

$$\operatorname{ctg}(\mu_n) = \frac{\mu_n^2 - \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\lambda_0^2} \cdot \delta^2}{\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda_0}\right) \cdot \delta \cdot \mu_n}, \quad (2)$$

котре отримане для граничних умов (і початкових) для пластини (товщиною δ) наступного типу:

$$\begin{cases} -\lambda_0 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\alpha_1 \cdot \theta, \text{ при } z = 0; \lambda_0 \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\alpha_2 \cdot \theta, \text{ при } z = \delta; \\ \theta = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \theta = 0 \text{ при } t = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де α_1, α_2 – коефіцієнти тепловіддачі (теповідводу) відповідно поверхонь пластини $z = 0$ й $z = \delta$; $A_n(z), A_n(0)$ й β_n обчислюємо за наступними формулами [1]:

$$\begin{cases} A_n(z) = \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot z\right) + \frac{\alpha_1}{\lambda_0} \delta \sin\left(\frac{\mu_n}{\delta} \cdot z\right); A_n(0) = \mu_n; \\ \beta_n = \mu_n^2 + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_0} \cdot \delta\right)^2 + \frac{\mu_n^2 - \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_0} \cdot \delta\right)^2}{\mu_n} \sin \mu_n \cos \mu_n + 2 \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_0} \delta\right) \sin^2 \mu_n. \end{cases} \quad (4)$$

Температурне поле джерела тепла, діючого безперервно протягом проміжку часу t_0 , знайдемо, проінтегрувавши отриманий вираз по τ у межах $0 \dots t_0$:

$$\theta(r, z, t) = \frac{q_t}{2\pi\lambda_0\delta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(z) \cdot A_n(0)}{\beta_n} \int_0^{t_0} \exp\left[-\frac{r^2}{4a(t-\tau)} - a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} (t-\tau)\right] \frac{d\tau}{t-\tau}, \quad (5)$$

або, після введення заміни змінних $t - \tau = t'$ (й виправлення помилок, присутніх у [1]):

$$\theta(r, z, t) = \frac{q_t}{2\pi\lambda_0\delta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(z) \cdot A_n(0)}{\beta_n} \cdot \int_{t-t_0}^t \exp\left[-\frac{r^2}{4at'} - a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} t'\right] \frac{dt'}{t'}. \quad (6)$$

Якщо джерело тепла діє безперервно протягом тривалого проміжку часу ($t \rightarrow \infty$, $t_0 \rightarrow \infty$), формула (6) дещо спрощується:

$$\theta = \frac{q_t}{\pi \lambda_0 \delta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(z) \cdot A_n(0)}{\beta_n} \cdot K_0\left(r \frac{\mu_n}{\delta}\right), \quad (7)$$

де K_0 – модифікована функція Бесселя другого роду нульового порядку. У подальшому будемо температурне поле джерела тепла описувати саме співвідношенням (7).

2. Термонапружено-деформований стан пластини скінченної товщини (δ) при зосередженому нагріванні (плоска задача).

Якщо ввести функцію напружень ψ , яка задовольняє наступному рівнянню [9; 14]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = \alpha_T \cdot E \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad (8)$$

де α_T – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, E – модуль пружності, тоді напруження й деформації можна знайти зі співвідношень:

$$\begin{cases} \sigma_r = \psi/r; \quad \sigma_\theta = \partial \psi / \partial r; \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha_T \theta; \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha_T \theta, \end{cases} \quad (9)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Рівняння (9) можна подати у наступному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\psi r) \right] = -\alpha_T \cdot E \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (10)$$

Після подвійного інтегрування (10) по r матимемо:

$$\psi = -\frac{E}{r} \left[\int (\alpha_T \cdot \theta) r dr \right] + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (11)$$

Звідси

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{E}{r^2} \left[\int (\alpha_T \cdot \theta) r dr \right] + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}; \\ \sigma_\theta = E \left[-(\alpha_T \cdot \theta) + \frac{1}{r^2} \int (\alpha_T \cdot \theta) r dr \right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}. \end{cases} \quad (12)$$

У (11), (12) $C_{1,2}$ – константи, які визначаються з граничних умов. Зазначимо, що (11) й (12) (із урахуванням (9)) повністю описують термонапружено-деформований стан тіла (пластинки скінченної товщини) у будь-який момент часу у випадку його симетричного нагрівання джерелом на поверхні $z = 0$, температурне поле котрого описується $\theta(r, t)$ наступного виду:

$$\theta(r, t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{q_t}{\pi \lambda_0 \delta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\beta_n} \cdot K_0 \left(r \cdot \frac{\mu_n}{\delta} \right). \quad (13)$$

Розглянемо задачу, коли у початковий момент часу t_0 тіло знаходиться під впливом короткочасного нагрівання джерелом тепла зосередженого типу, розміщеного на поверхні пластини $z = 0$ у точці $r = 0$, з енергією Q , Дж. Можна показати [1], що у цьому випадку:

$$\theta(r, t) = \frac{Q}{4\pi \lambda_0 \delta t} \cdot \exp \left(-\frac{r^2}{4at} - bt \right), \quad b = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{c\rho\delta}, \quad (14)$$

де ρ – щільність матеріалу пластинки, c – його питома теплоємність.

Підставляючи (14) у (12) знайдемо постійні C_1 й C_2 з умови, що σ_r та σ_θ при $r \rightarrow \infty$ прямують до нуля, а у точці $r = 0$ σ_r та σ_θ не дорівнюють нескінченності. Тоді $C_1 = 0$, а C_2 знайдемо зі співвідношення:

$$C_2 = -\frac{\alpha_T \cdot E \cdot Q \cdot \alpha}{2\pi \lambda_0 \delta} \cdot \exp(-bt). \quad (15)$$

Таким чином, маємо:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{\alpha_T \cdot E \cdot Q \cdot a}{2\pi \lambda_0 \delta r^2} \cdot \left(1 - \exp \left[-\frac{r^2}{4at} \right] \right) \cdot \exp(-bt); \\ \sigma_\theta = -\frac{\alpha_T \cdot E \cdot Q}{4\pi \lambda_0 \delta t} \cdot \left[\exp \left(-\frac{r^2}{4at} \right) - \frac{2at}{r^2} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{r^2}{4at} \right\} \right) \right] \cdot \exp(-bt). \end{cases} \quad (16)$$

Враховуючи (9), можна за співвідношеннями (16) легко знайти компоненти деформації ε_r та ε_θ .

Формули (16) показують, що напруження σ_r – стискаючі, а σ_θ – спочатку (біля точки $r = 0$) теж стискаючі, а потім, з віддаленням від початку координат ($r = 0$), переходять у розтягуючі. Це й зрозуміло, оскільки матеріал пластинки намагається збільшити свої розміри під впливом нагрівання. У той самий час холодні частини пластинки не дають можливості матеріалу розширюватись, й у ньому виникають стискаючі напруження. Зазначимо, що подібні явища з плином часу можуть призвести до появи тріщин у матеріалі конструкції, якщо вона знаходиться під впливом точкових миттєвих зосереджених джерел тепла [1; 3; 7; 8; 10; 12].

Вираз для σ_θ змінює свій знак при $\tilde{z} = \frac{r^2}{4at} \approx 1$.

На рис. 1 подані епюри напружень σ_r та σ_θ при зосередженому нагріванні матеріалу (пружний випадок, $E = const$).

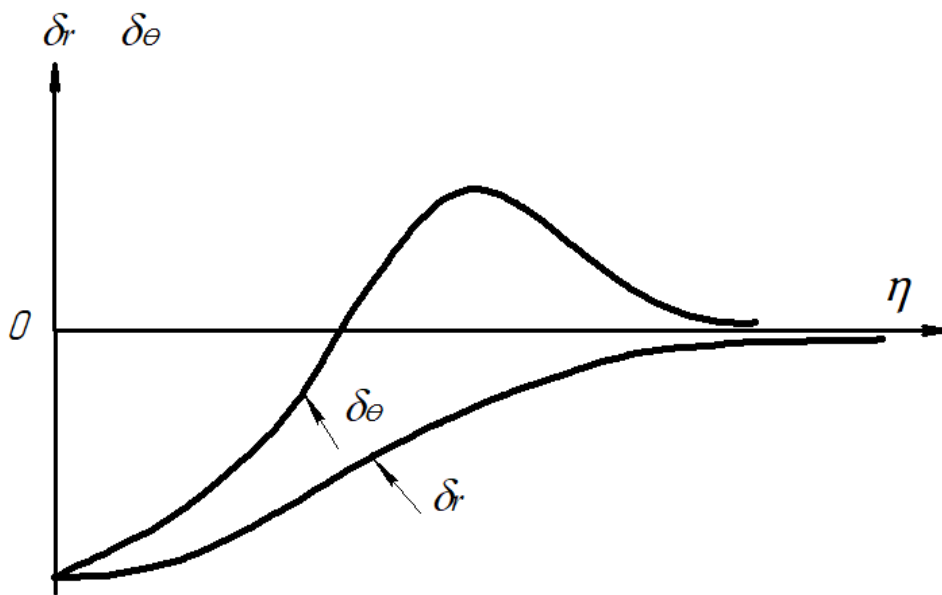


Рис. 1. Епюри напружень σ_r та σ_θ (плоска задача)

3. Термонапружено-деформований стан пластини скінченної товщини (δ) при зосередженому нагріванні (тривісний напружений стан).

У випадку полярної симетрії деформації, що виникають у твердому тілі в результаті його нерівномірного нагріву, можна подати відомими формулами [9; 14]:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha_T \theta; & \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha_T \theta; \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha_T \theta; & \gamma_{rz} = \frac{1}{G} \tau_{rz}; & G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{cases} \quad (17)$$

Враховуючи, що відносні деформації ε_r та ε_θ виражаються через переміщення (u, w) наступним чином:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (18)$$

для γ_{rz} маємо:

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (19)$$

Покладемо:

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}. \quad (20)$$

Тоді для компонент напружень (у пружній постановці) маємо:

$$\begin{cases} \sigma_r = \bar{\lambda} e + 2G \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\alpha_T E \theta}{(1-2\nu)}; & \sigma_\theta = \bar{\lambda} e + 2G \frac{u}{r} - \frac{\alpha_T E \theta}{(1-2\nu)}; \\ \sigma_z = \bar{\lambda} e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\alpha_T E \theta}{(1-2\nu)}; & \tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{cases} \quad (21)$$

Рівняння рівноваги елемента пластини, що знаходиться під впливом напружень σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} набувають вигляду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (22)$$

Підставляючи (21) у (22) й виконавши низку перетворень, матимемо систему двох рівнянь із відповідними граничними умовами, що дають можливість знайти зв'язок між прикладеним температурним полем $\theta(r, z, t)$ й напруженнями σ_r , σ_θ , σ_z та τ_{rz} [2; 5; 6; 9; 11; 13; 14]:

$$\left\{ \begin{aligned} (\bar{\lambda} + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial r} + G \nabla^2 u - G \frac{u}{r^2} &= \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r}; \\ (\bar{\lambda} + G) \cdot \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w &= \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu)} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Покладемо знову: $u = \partial \bar{\psi} / \partial r$; $w = \partial \bar{\psi} / \partial z$, де $\bar{\psi}$ – функція напружень, тоді система (23) зведеться до одного рівняння:

$$e = \nabla^2 \bar{\psi} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \cdot \alpha_T \cdot \theta. \quad (24)$$

При цьому з (21) із урахуванням подань u та w через $\bar{\psi}$ маємо:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= -2G \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} \right); \quad \sigma_\theta = -2G \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} \right); \\ \sigma_z &= -2G \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right); \quad \tau_{rz} = 2G \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Введемо позначення:

$$m = \alpha_T \cdot (1+\nu) / (1-\nu). \quad (26)$$

Тоді, використовуючи підхід роботи [1], у пружній постановці розподіл напружень у пластині при дії на неї зосередженого джерела тепла $W(r, z, t) = \frac{Q}{2\pi r} \cdot \delta_+(r) \cdot \delta_+(t)$, де:

$$\int_{a+0}^b f(\xi) \cdot \delta_+(\xi - X) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{при } X < a, X > b; \\ f(X+0), & \text{при } a \leq X \leq b, \end{cases} \quad (27)$$

може бути знайдений за допомогою функції $\bar{\psi}_1$ (якщо не враховувати граничні умови задачі):

$$\bar{\psi}_1 = -\frac{q_t m a}{\pi \lambda_0 \delta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma_n^2 a t) B_n A_n(z) \cdot \int_0^{\infty} \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha^2 a t)}{(\alpha^2 + \gamma_n^2)} \cdot I_0(\alpha r) d\alpha, \quad (28)$$

де $\gamma_n = \mu_n / \delta$, I_0 – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Функція $\bar{\psi}_1$ з (28) є розв'язком диференціального рівняння (24). Однак граничні умови задачі:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{rz} = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \text{ при } z = 0, z = \delta \quad (29)$$

тут не виконуються.

Для задоволення граничних умов використаємо загальне диференціальне рівняння теорії пружності у циліндричних координатах для випадку вісесиметричної задачі [5; 6; 9; 11; 13; 14]:

$$\nabla^2 \nabla^2 \bar{\Psi}_2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_2}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (30)$$

При цьому безпосередньою підстановкою можна впевнитись, що рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad (31)$$

задовольняються, якщо покласти:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \bar{\Psi}_2 - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_2}{\partial r^2} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \bar{\Psi}_2 - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial r} \right); \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \bar{\Psi}_2 - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_2}{\partial z^2} \right]; \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \bar{\Psi}_2 - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_2}{\partial z^2} \right]. \end{cases} \quad (32)$$

Подано тепер функцію напружень $\bar{\Psi}$ у вигляді суми двох частин $\bar{\Psi}_1$ та $\bar{\Psi}_2$ [9; 13; 14]:

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_1 + \bar{\Psi}_2. \quad (33)$$

Функцію Ψ_2 оберемо схожою на $\bar{\Psi}_1$, але з наявністю чотирьох констант \bar{C}_i , $i = (1, 4)$, які дозволяють після підстановки $\bar{\Psi}$ у (33) задовольнити граничним умовам (29). Функція $\bar{\Psi}_2$, що задовольняє диференціальному рівнянню (30), може бути подана у вигляді:

$$\bar{\Psi}_2 = \frac{q_l m a}{\pi \lambda_0 \delta} \cdot (1 - 2\nu) \cdot \int_0^\infty \alpha^2 \exp(-\alpha^2 a t) I_0(\alpha r) \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{B_n \exp(-\gamma_n^2 a t)}{(\alpha^2 + \gamma_n^2)} \cdot \Psi_n(z) d\alpha. \quad (34)$$

Тут i у (28):

$$\left\{ \begin{aligned}
 B_n &= \frac{\delta\gamma_n}{\delta^2\gamma_n^2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_0}\delta + \frac{\left(\delta^2\gamma_n^2 - \left[\frac{\alpha_1}{\lambda_0}\delta\right]^2\right)}{\delta\gamma_n} \sin\gamma_n\delta \cos\gamma_n\delta + 2\left(\frac{\alpha_1}{\lambda_0}\delta\right) \sin^2\gamma_n\delta}; \\
 A_n(z) &= \delta\gamma_n \cos\gamma_n z + \frac{\alpha_1}{\lambda_0}\delta \sin\gamma_n z; \\
 \Psi_n(z) &= \alpha^{-3} \cdot (\bar{C}_{1n} + \bar{C}_{2n}\alpha z) \cdot sh\alpha z + \alpha^{-3} \cdot (\bar{C}_{3n} + \bar{C}_{4n}\alpha z) \cdot ch\alpha z,
 \end{aligned} \right. \quad (35)$$

де $\bar{C}_{1n}, \dots, \bar{C}_{4n}$ – деякі постійні.

Зворотне/обернене перетворення Ханкеля (по α) дає розв'язок (34) [2; 4; 5; 6; 11; 13]:

$$\bar{\Psi}_2 = \int_0^{\infty} \alpha \left[(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\alpha z) \cdot sh\alpha z + (\bar{C}_3 + \bar{C}_4\alpha z) \cdot ch\alpha z \right] \cdot I_0(\alpha r) d\alpha. \quad (36)$$

Оскільки загальний розв'язок розшукуємо у вигляді $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_1 + \bar{\Psi}_2$, тоді кожному члену $\bar{\Psi}_1$ повинен відповідати певний член з (36). Звідси:

$$\bar{\Psi}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha \cdot \left[(\bar{C}_{1n} + \bar{C}_{2n}\alpha z) \cdot sh\alpha z + (\bar{C}_{3n} + \bar{C}_{4n}\alpha z) \cdot ch\alpha z \right] \cdot I_0(\alpha r) d\alpha. \quad (37)$$

Задля зручності роботи з (37) помножимо його на постійні по відношенню до (30) коефіцієнти:

$$(1 - 2\nu) \cdot \frac{q_t m a}{\pi \lambda_0 \delta} \cdot \frac{\alpha^2 \exp(-\gamma_n^2 a t - \alpha^2 a t)}{(\alpha^2 + \gamma_n^2)} \cdot B_n. \quad (38)$$

Тоді із урахуванням (38) отримаємо (34).

Підставляючи (28), (37) у (33) та (29), визначимо постійні \bar{C}_{in} , $i = \overline{(1, 4)}$. Опускаючи громіздкі перетворення щодо розв'язку чотирьох рівнянь з невідомими \bar{C}_{1n} , \bar{C}_{2n} , \bar{C}_{3n} , \bar{C}_{4n} , отриманих з (29) підстановкою у нього (33), матимемо лише кінцеві значення для σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} [9; 13; 14]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -P \int_0^\infty A(\alpha) \sum_{n=1}^\infty S_n(\alpha) \left[f_{1n}(\alpha, z) I_0(\alpha r) + f_{2n}(\alpha, z) \frac{I_1(\alpha r)}{r} \right] d\alpha; \\ \sigma_\theta &= -P \int_0^\infty A(\alpha) \sum_{n=1}^\infty S_n(\alpha) \left\{ [f_{1n}(\alpha, z) + \alpha f_{2n}(\alpha, z)] I_0(\alpha r) - f_{3n}(\alpha, z) \frac{I_1(\alpha r)}{r} \right\} d\alpha; \\ \sigma_z &= -P \int_0^\infty \alpha A(\alpha) I_0(\alpha r) \sum_{n=1}^\infty S_n(\alpha) \left[f_{1n}(\alpha, z) + \alpha^2 (1-\nu) \frac{\partial \psi_n}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial z^3} \right] d\alpha; \\ \tau_{rz} &= P \int_0^\infty \alpha A(\alpha) I_1(\alpha r) \sum_{n=1}^\infty S_n(\alpha) \left[\frac{dA_n}{dz} + \alpha^3 (1+\nu) \psi_n + \nu \alpha \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z^2} \right] d\alpha, \end{aligned} \quad (39)$$

де $P = 2G \cdot \frac{q_t m a}{\pi \lambda_0 \delta}$; $A(\alpha) = \alpha \cdot \exp(-\alpha^2 a t)$; $S_n = \frac{\beta_n \cdot \exp(-\gamma_n^2 a t)}{\gamma_n^2 + \alpha^2}$;

$$f_{1n}(\alpha, z) = \gamma_n^2 A_n - \alpha^3 (1-\nu) \frac{\partial \psi_n}{\partial z} - \nu \alpha \frac{\partial^3 \psi_n}{\partial z^3};$$

$$f_{2n}(\alpha, z) = \alpha A_n + \alpha^2 \frac{\partial \psi_n}{\partial z};$$

I_1 – функція Бесселя першого роду першого порядку.

Розглянемо термонапружений стан пластинки товщиною $\delta = 16 \cdot 10^{-3}$ м зі сплаву АМг6, на поверхні якої діє зосереджене джерело тепла (наприклад, відбувається зварювання – наплавляється точка). Віддача тепла відбувається у повітря. Для розрахунків на ПЕОМ параметрів термонапруженого стану використані наступні значення величин, що фігурують у вищенаведених формулах (39): $\alpha_1 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ Вт/(м²·°С); $\alpha_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ Вт/(м²·°С); $\lambda_0 = 0,28$ Вт/(м·°С), $a = 0,5$ м²/с; $Q = 2022$ кДж; $q_t = Q/t_0 = 2022$ кДж/с, $t_0 = 1$ с; $\alpha_T = 25 \cdot 10^{-6}$ (°С)⁻¹. Після завершення першої секунди нагрівання плас-

тинки за формулами (39) побудовані розподіли напружень σ_r , σ_θ на поверхнях $z = (0; 4; 16) \cdot 10^{-3}$ м (рис. 2). На рис. 3 подано розподіл напружень σ_z та τ_{rz} у пластинці при її зосередженому нагріванні джерелом тепла, розміщеним на поверхні $z = 0$. На рис. 4 подано розподіл напружень σ_z (а) та τ_{rz} (б) по товщині пластини при її зосередженому поверхневому нагріванні.

Аналіз рис. 2–4, на яких подано епюри напружень σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} свідчить про те, що розподіл напружень по товщині листа доволі нерівномірний, хоча його товщина й складає усього $\delta = 16$ мм. Крім того, слід зазначити, що вказані компоненти напружень (для плоскої задачі) суттєво відрізняються за характером розподілу по радіусі r від таких самих компонент (σ_r , σ_θ), отриманих при розв'язуванні об'ємної задачі (тривимірний термонапружений стан).

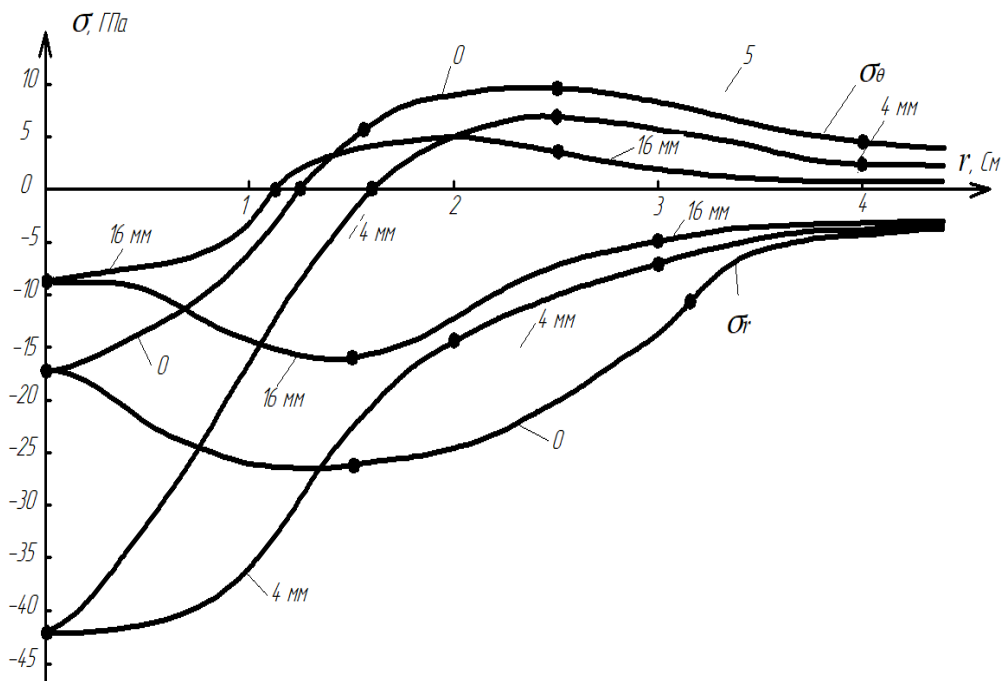


Рис. 2. Розподіл напружень σ_r та σ_θ у пластині при нагріванні її зосередженим джерелом тепла

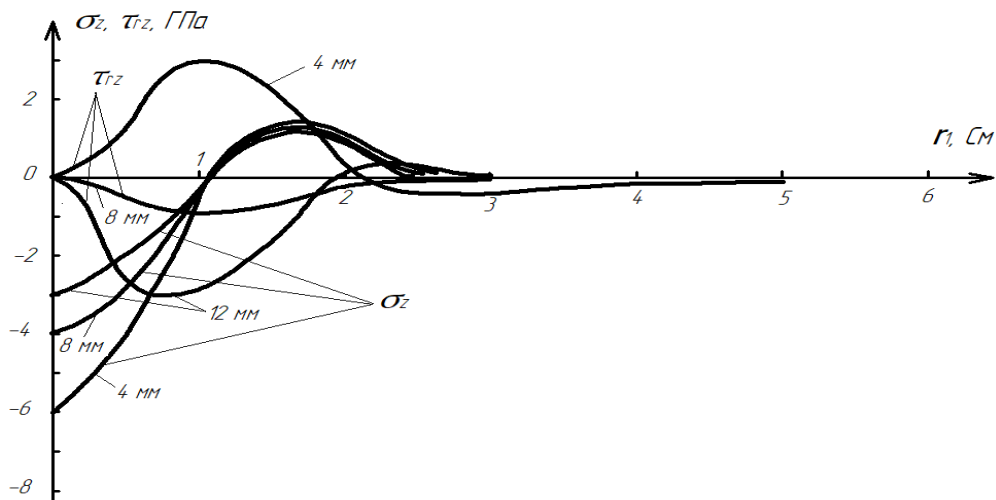


Рис. 3. Розподіл напружень σ_z та τ_{rz} у пластині при її зосередженому нагріванні джерелом тепла, розміщеним на поверхні $z = 0$

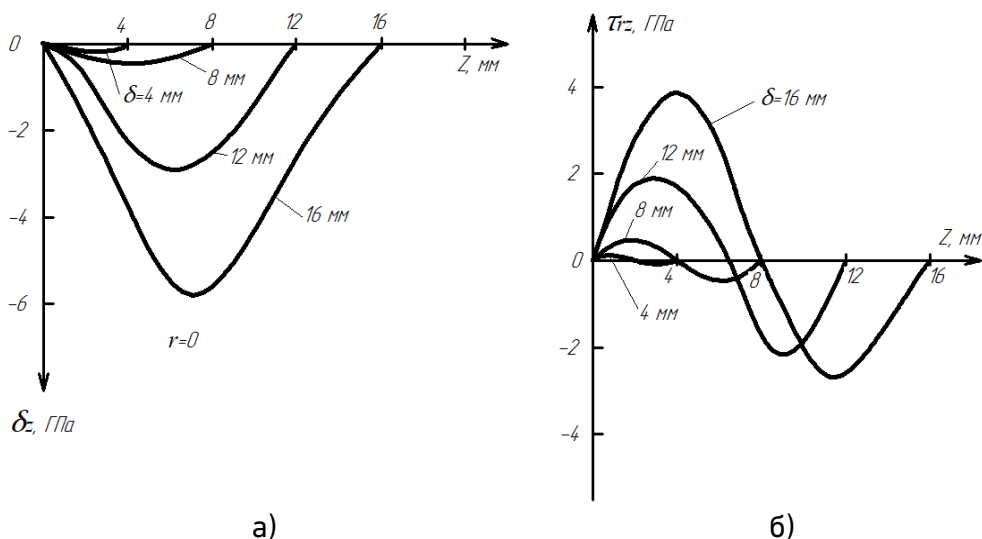


Рис. 4. Розподіл напружень σ_z (а) та τ_{rz} (б) по товщині пластини при її зосередженому поверхневому нагріванні

Висновки

1. Аналіз епюр розподілу напружень ($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}$) у пластині

при її нагріванні зосередженим на поверхні джерелом показав, що цей розподіл по товщині листа металоконструкції крана є доволі нерівномірним навіть для невеликих товщин (до 16 мм).

2. Аналіз впливу положення джерела тепла по товщині пластини на величину вказаних напружень за розміщення джерела зварювального нагрівання на деякій відстані від поверхні пластини свідчить про наступне: зі збільшенням відстані від центра пластини вповдовж радіуса розподіл напружень по товщині пластини вирівнюється й вже на відстані трьох товщин пластини стає незалежним від координати z .

3. Слід зазначити, що отримані значення напружень (у плоскій постановці задачі) близькі до величин σ_r й σ_θ у випадку об'ємного напруженого стану у пластині (на глибині порядку 8 мм від поверхні пластини). Інші епюри різко відрізняються від розрахункових, отриманих у припущенні плоского напруженого стану.

4. Отримані пружні напруження вважаються вихідними для розрахунку пружно-пластичної задачі, але у даному випадку, на відміну від плоскої задачі, не можна прийняти гіпотезу досягнення одним з напружень значення границі текучості. У випадку об'ємної задачі відсутні рівняння для розрахунку інших значень тензора напружень. Тому у подальшому для даної ситуації можна застосувати один з наближених методів, наприклад, *метод січного модуля*. Останній метод розрахунку зварювальних напружень є наближеним, і у технічній літературі отримав саме таку назву, хоча доведення збіжності цього методу зараз відсутнє, але практика розрахунків дозволяє зазначити його задовільну збіжність.

1. Недосека А. Я. Основы расчета сварных конструкций. К. : Выща школа. Головное изд-во, 1988. 263 с. 2. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М. : Наука, 1974. 432 с. 3. Винокуров В. А., Григорьянц А. Г. Теория сварочных деформаций и напряжений. М. : Машиностроение, 1984. 280 с. 4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z -преобразования. М. : Наука, 1971. 288 с. 5. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М. : Наука, 1971. 287 с. 6. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М. : Высшая школа, 1965. 423 с. 7. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. К. : Наукова думка, 1976. 320 с. 8. Николаев Г. А., Куркин С. А., Виноградов В. А. Расчет, проектирование и изготовление сварных конструкций. М. : Высшая школа, 1971. 760 с. 9. Подстри-

гач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. К. : Наукова думка, 1976. 310 с. **10.** Казимиров А. А., Недосека А. Я., Лобанов А. И., Радченко И. С. Расчет температурных полей в пластинах при электросварке плавлением. К. : Наукова думка, 1968. 846 с. **11.** Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М. : Гостехиздат, 1956. 1141 с. **12.** Касаткин Б. С., Кудрин А. Б., Лобанов Л. М. и др. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений. К. : Наукова думка, 1981. 583 с. **13.** Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. К. : Наукова думка, 1970. 308 с. **14.** Коваленко А. Д. Основы термоупругости. К. : Наукова думка, 1970. 307 с. **15.** Човнюк Ю. В. Нестационарные термоупругие поля в диспергирующих, диссипативных деформируемых средах (телах) и композиционных материалах при их лазерной обработке короткими волновыми импульсами. *Вісник Черкаського інженерно-технологічного інституту*. 2001. № 4. С. 58–65.

REFERENCES:

1. Nedoseka A. Ya. Osnovy rascheta svarnykh konstruktsiy. K. : Vyscha shkola. Golovnoe izd-vo, 1988. 263 s. **2.** Arsenin V. Ya. Metody matematicheskoy fiziki i spetsialnyie funktsii. M. : Nauka, 1974. 432 s. **3.** Vinokurov V. A., Grigoryants A. G. Teoriya svarochnykh deformatsiy i napryajeniy. M. : Mashinostroenie, 1984. 280 s. **4.** Dech G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa i z -preobrazovaniya. M. : Nauka, 1971. 288 s. **5.** Korenev B. G. Vvedenie v teoriyu besselevykh funktsiy. M. : Nauka, 1971. 287 s. **6.** Kuznetsov D. S. Spetsialnyie funktsii. M. : Vysshaya shkola, 1965. 423 s. **7.** Mahnenko V. I. Raschetnyie metody issledovaniya kinetiki svarochnykh napryajeniy i deformatsiy. K. : Naukova dumka, 1976. 320 s. **8.** Nikolaev G. A., Kurkin S. A., Vinogradov V. A. Raschet, proektirovanie i izgotovlenie svarnykh konstruktsiy. M. : Vysshaya shkola, 1971. 760 s. **9.** Podstrigach Ya. S., Kolyano Yu. M. Obobschennaya termomehanika. K. : Naukova dumka, 1976. 310 s. **10.** Kazimirov A. A., Nedoseka A. YA., Lobanov A. I., Radchenko I. S. Raschet temperaturnykh poley v plastinakh pri elektrosvarke plavleniem. K. : Naukova dumka, 1968. 846 s. **11.** Tranter K. Dj. Integralnyie preobrazovaniya v matematicheskoy fizike. M. : Gostehizdat, 1956. 1141 s. **12.** Kasatkin B. S., Kudrin A. B., Lobanov L. M. i dr. Eksperimentalnyie metody issledovaniya deformatsiy i napryajeniy. K. : Naukova dumka, 1981. 583 s. **13.** Guz A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. Difraktsiya uprugih voln. K. : Naukova dumka, 1970. 308 s. **14.** Kovalenko A. D. Osnovy termouprugosti. K. : Naukova dumka, 1970. 307 s. **15.** Chovnyuk Yu. V. Nestatsionarnyie termouprugie polya v dispergiruyuschih, dissipativnih deformiruemyykh sredah (telah) i kompozi-tsiionnykh materialah pri ih lazernoy obrabotke korotkimi volnovyimi impulsami. *Visnyk Cherkaskoho inzhenerno-tekhnolohichnoho*

Chovniuk Y. V., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Ivanov Ye. O. (National Aviation University, Kyiv), Cherednichenko P. P., Associate Professor, Kravchuk V. T., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Ostapushchenko O. P., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Kravchenko I. M. (Kyiv National University of Construction and Architecture)

NUMERICAL-ANALYTICAL APPROACH IN THE ANALYSIS OF THE THERMAL STRESS-STRAIN STATE IN LOAD-LIFTING CRANES METAL STRUCTURES UNDER CONCENTRATED HEATING

A numerical-analytical approach in the analysis of the thermal stress-strain state in load-lifting cranes metal structures during their concentrated heating is proposed. Planar and volumetric (three-axis stress state) problems are solved. The main deformations components for both problems are established. Mathematical physics methods and Laplace and Hankel integral transformations are used. Analytical results obtained in this work are verified by numerical calculations on a PC. They establish a rather inhomogeneous nature in the deformation and change of the thermal stress state components in the plate under the concentrated heat source action located on the surface. Particularly, for some stresses components (compression – tension) both on depth/thickness of a plate, and on radius from an axis of a heat source location. This, in essence, means that such effects over time (even in the elastic setting) leads to the cracks, which inevitably bring the aging and destruction of cranes metal structures.

The problem of determining and analyzing the thermal stress state in the plate (element of crane metal structure) when heated by a concentrated heat source is considered and developed in an elastic formulation by mathematical physics methods. In this case, the Laplace transform in time and the Hankel radial-coordinate transformation were used to solve the equation of thermal conductivity in the cylindrical coordinate system.

A comparative analysis of stresses distribution over plate thickness in the planar and volumetric formulations, as well as their dependence on the heat source position relative to the metal structure

surface, was carried out.

The results obtained in this work can be further used to improve and refine engineering methods for calculating the diagnostic equipment parameters used to determine the stress-strain state of cranes metal structures, both at the design and construction stage, and in their actual operation.

***Keywords:* numerical-analytical approach; analysis; thermal stress-strain state; metal structures; load-lifting crane; concentrated surface heating.**
