

МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 539.3: 539.4

Кундрат А. М., к.ф.-м.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, riy1@ua.fm)

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З СИСТЕМАМИ КОЛІНЕАРНИХ АРМУЮЧИХ ЕЛЕМЕНТІВ РІЗНОЇ КІЛЬКОСТІ

В умовах антиплатоскої деформації розглянуто напружено-деформований стан пружного масиву з системами жорстких стрічкових включень. Досліджено вплив взаємозв'язаності та кількості включень на прикладах їх колінеарного розташування. Обчислені стрибки напружень та коефіцієнти інтенсивності напружень в околі вершин включень, побудовані графіки переміщень композиту. Зроблені висновки про використання зв'язаних взаємонерухомих армувальних елементів в структурі композитів.

Ключові слова: пружне тіло, поздовжній зсув, включення, стрибок напружень, коефіцієнт інтенсивності.

Серед конструкційних матеріалів широко вживаними залишаються композиційні, зокрема армовані, оскільки їх використання забезпечує значний ресурс роботи при помірних економічних затратах. І як результат постановки задач вивчення напруженого стану тіл з чужорідними включеннями [1; 2], для яких антиплатоска деформація масиву залишається найбільш зручною моделлю. Різні способи армування отримали досить широке застосування в технології виробництва матеріалів і є ефективними способами регулювання і управління процесами їх структуроутворення та властивостей готового продукту. Так, для підвищення жорсткісних характеристик елементи арматури можуть зв'язуватись в єдиний каркас, що зумовлює потребу у нових постановках задач механіки композитів.

Суттєвий вплив зв'язаності досліджено в ряді робіт із загальною постановкою довільного розташування включень [3–6], з розв'язками для часткових випадків колінеарного та паралельного розташування стрічок за навантаження однорідним полем напружень на безмежності [3; 4], чи за витягування погонними силами, прикладеними безпосередньо до включень [5]. Окремо розглянуто найбільш небезпечну орієнтацію однорідного зсуву для діади довільно розташованих стрічок [6] і тонкостінних високомодульних фасонних профілів [7]. Аналіз поданих результатів свідчить про значне покращення фізико-механічних властивостей конструкцій, зокрема

підвищення їх жорсткості в результаті зв'язаності навіть окремих армувальних елементів. Але з іншого боку це призводить до збільшення концентрації напружень в масиві, що може бути наслідком передчасного руйнування.

Продемонструємо ефекти зв'язаності стрічкової арматури на задачах поздовжнього зсуву пружного тіла з множиною взаємонерухомих жорстких включень.

Постановка та інтегральні рівняння задачі. Розглянемо ізотропне тіло $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, армоване системою колінеарних безмежно тонких тунельних включень, протяжних вздовж осі z . Попереччя включень у площині xy – це відрізки L_k з розмірами $2l_k$ ($k = \overline{1, N}$). Приймаємо, що включення є абсолютно жорсткими та перебувають в ідеально механічному контакті з матрицею. Досліджуємо збурення напружено-деформованого стану композиції, викликане однорідним полем напружень зсуву на безмежності.

Крайова задача антиплоскої деформації для масиву із взаємонерухомими недеформівними включеннями має вигляд [3]:

$$\mu \nabla^2 w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{k=1}^N L_k; \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad (x, y) \in L_k, \quad k = \overline{1, N}; \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial w}{\partial x} = \tau_1^\infty, \quad \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_2^\infty, \quad (x, y) \rightarrow \infty; \quad (3)$$

з додатковими умовами відсутності взаємних переміщень та глобальної рівноваги системи зв'язаних між собою у єдиний каркас включень відповідно:

$$w_j - w_k = 0, \quad (x, y) \in L_j, L_k, \quad j \neq k; \quad \sum_{k=1}^N \int_{L_k} [\tau_{nz}]_k(s) ds = 0. \quad (4)$$

У разі незв'язаних включень замість умов (4) приймають:

$$\int_{L_k} [\tau_{nz}]_k(s) ds = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (5)$$

Тут $w = w(x, y)$ – z -компонента вектора переміщення, μ – модуль зсуву матеріалу матриці, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – оператор Лапласа, $[\tau_{nz}]$ – стрибки напружень на включеннях, n, s – нормаль та дотична до контуру.

Для розв'язання задачі використаємо фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа (1): вираз переміщення через невідомі стрибки напружень подамо у вигляді

$$w(x, y) = w^0(x, y) + \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} [\tau_{nz}]_i(s) ds, \quad (6)$$

$$(\xi, \eta) \in L_i,$$

де $w^0(x, y) = (\tau_1^\infty / \mu)x + (\tau_2^\infty / \mu)y$ – відома функція основного стану для суцільного тіла без включень (визначена з точністю до сталої). Другий доданок у формулі (6) описує збурення, яке внесене системою включень.

Дослідимо системи прямолінійних включень, паралельних до осі абсцис. Тоді з урахуванням умов (2) (3) отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь задачі стосовно невідомих стрибків напружень:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} \frac{x_i^0 - x_k^0 + \xi - x_k}{(x_i^0 - x_k^0 + \xi - x_k)^2 + (y_i^0 - y_k^0)^2} [\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi = \tau_1^\infty, \quad (7)$$

$$x_k \in L_k, \quad k = \overline{1, N},$$

де x_k^0, y_k^0 – координати центру k -ого включення.

Для зв'язаних включень систему інтегральних рівнянь слід розв'язати за додаткових умов (4), які у термінах функцій стрибків матимуть вигляд

$$w^0(x_k^0, y_k^0) - w^0(x_1^0, y_1^0) + \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} \ln \sqrt{\frac{(x_i^0 + \xi - x_k^0)^2 + (y_i^0 - y_k^0)^2}{(x_i^0 + \xi - x_1^0)^2 + (y_i^0 - y_1^0)^2}} [\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi = 0, \quad (8)$$

$$k = \overline{2, N}; \quad \sum_{i=1}^N \int_{-l_i}^{l_i} [\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi = 0.$$

Числові розв'язки інтегральних рівнянь (7) з відповідними додатковими умовами будували методом механічних квадратур [8]. За знайденими функціями стрибка обчислювали коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) в околі вершин включень

$$k_{3k}^\pm = \pm \frac{1}{2\sqrt{l_k}} \lim_{x \rightarrow \pm l_k} \sqrt{l_k^2 - x^2} [\tau_{yz}]_k(x)$$

та пружні переміщення композиції відносно початку координат: $\tilde{w}(x, y) = w(x, y) - w(0, 0)$.

Розглянемо окремі випадки розташування включень з однаковими розмірами $2l_k = 2l$.

Система п'яти колінеарних включень, розміщених по осі абсцис на віддалі d один від одного з геометричними центрами $(x_k, 0)$,

$x_k^0 = (k-3)d$, $k = \overline{1, 5}$ (рис. 1, $N = 5$). Взаємне розташування включень описуватимемо безрозмірним параметром $\lambda = 2l/d$. Результати розрахунків порівнюємо з отриманими для двох та для одного включень [2; 4] відповідно до схеми на рис. 1 ($N = 2$, $N = 1$).

Розподіл функцій стрибків напружень по півширині центрального $x \in (0, l)$ та справа від нього розташованих включень для фіксованої віддалі між ними ($\lambda = 2l/d = 0,5$) подано на рис. 2. Рис. 3 демонструє залежності знерозміреного КІН від параметра зближення включень, а рис. 4 – графіки знерозміреного переміщення точок пружного масиву для близько розташованих ($\lambda = 0,9$) колінарних включень.

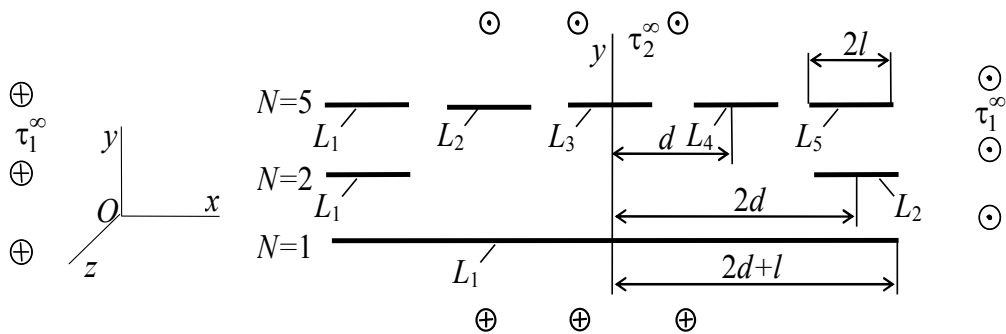


Рис. 1. Схема розташування колінарних включень

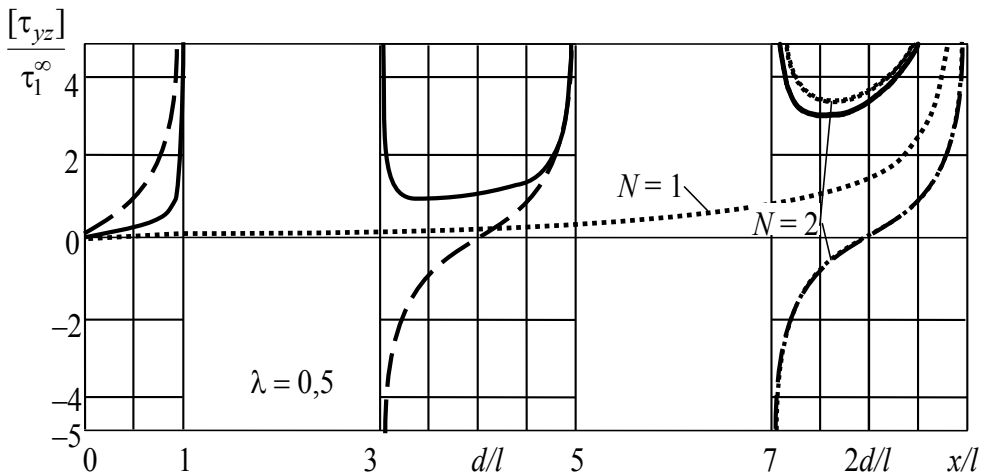


Рис. 2. Стрибки напружень: суцільні лінії – зв'язана, а штрихові – незв'язана система з п'яти включень ($N = 5$), пунктирні – одне включення ($N = 1$) та система з двох включень ($N = 2$)

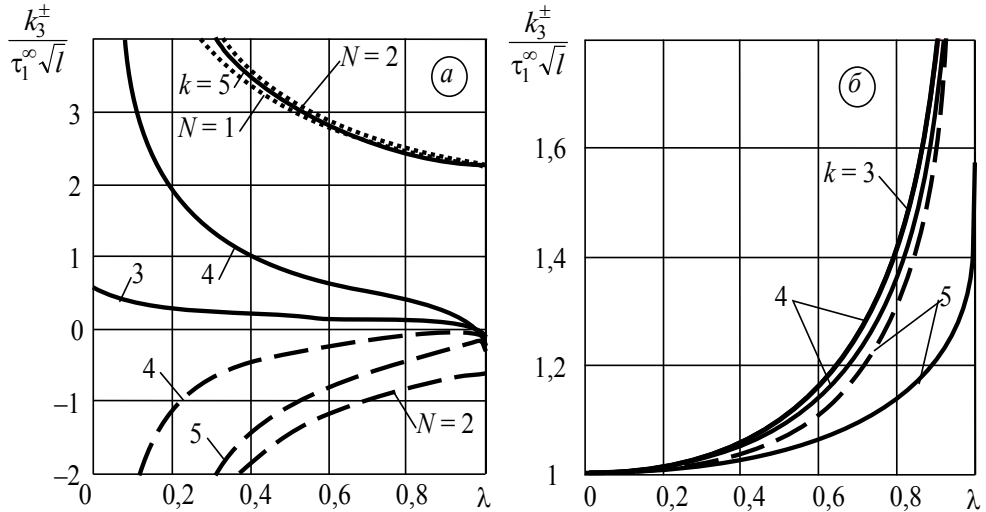


Рис. 3. Коефіцієнти інтенсивності напружень: а – зв’язані, б – незв’язані стрічки; суцільні лінії – праві, а штрихові – ліві вершини включень при $N = 5$, пунктирні – $N = 1$ та $N = 2$

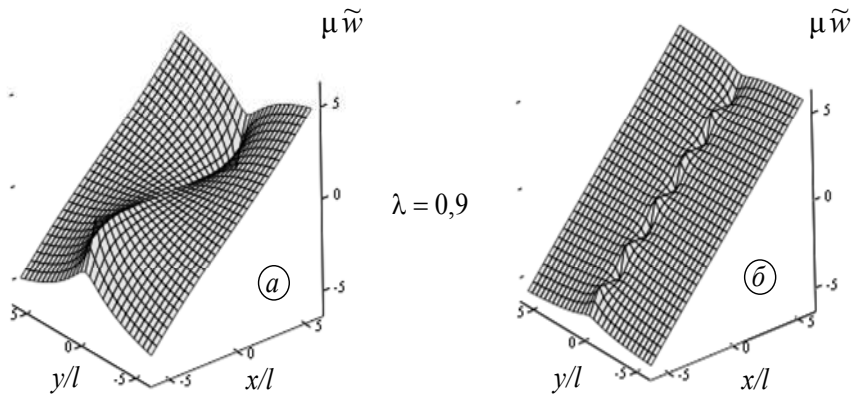


Рис. 4. Переміщення точок пружного масиву: а – зв’язані, б – незв’язані стрічки

Для зв’язаних включень виявили такі закономірності: небезпечнішими концентраторами є вершини включень, які дальше розташовані від центра; при віддаленні стрічок концентрація напружень підвищується ($|k_3^\pm|$ – спадна функція параметра λ така, що $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k_3^\pm = \pm\infty$); при зближенні стрічок концентрація напружень поблизу внутрішніх вершин практично зникає, а у крайній правій вершині прямує до сталої величини, характерної для вп’ятеро ширшого і

поодинокого включення ($k_3^+ \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1} \tau_1^\infty \sqrt{5l}$). Для незв'язаних включень спостерігаємо протилежні тенденції: завжди небезпечними є ближчі до початку координат вершини; при віддаленні включень концентрація напружень зменшується, а при зближенні – зростає.

Висновки. Композиційний матеріал зі зв'язаною стрічковою арматурою змодельовано пружним середовищем з системою взаємонерухомих жорстких тунельних включень. Сформульовано крайову задачу антиплоскої деформації ізотропного тіла з системами недеформованих включень. Побудовано та проаналізовано числові розв'язки для п'яти колінеарних стрічкових включень за умов однорідного зсуву на безмежності. Виявлено, що напружено-деформований стан композиції із взаємозв'язаною стрічковою арматурою має суттєві відмінності порівняно з випадком розмежованого армування.

1. Бережницький Л. Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле / Л. Т. Бережницький, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук. – К. : Наук. думка, 1983. – 288 с. 2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с. 3. Шацький І. П. Антиплоска деформація пружного простору зі зв'язаними жорсткими стрічковими включеннями / І. П. Шацький, А. М. Кундрат // Доп. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 55–60. 4. Шацький І. П. Поздовжній зсув масиву з взаємонерухомими жорсткими колінеарними включеннями / І. П. Шацький, А. М. Кундрат // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 69–73. 5. Шацький І. Антиплоска задача про витягування системи стрічкових включень із пружної матриці / І. Шацький, А. Кундрат // Машинознавство. – 2004. – № 7. – С. 21–23. 6. Шацький І. П. Влияние связанности ленточной арматуры на концентрацию напряжений продольного сдвига / И. П. Шацкий, А. Н. Кундрат // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2006. – Т. 2, № 2. – С. 273–280. 7. Кундрат А. М. Концентрація напружень поздовжнього зсуву в пружному середовищі, армованому фасонними профілями / Кундрат А. М., Шацький І. П. // Вісник ОДАБА. – 2016. – Вип. 62. – С. 229–233. 8. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К. : Наук. думка, 1981. – 324 с.

Рецензент: д.т.н., професор Кундрат М. М. (НУВГП)

Kundrat A. M., Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

ANTIPLANE STRAIN OF ELASTIC BODY WITH A SYSTEMS OF DIFFERENT NUMBERS OF REINFORCING ELEMENTS COLLINEAR

In terms antiplane strain is considered stressed-strained state of elastic systems with an array with the systems rigid ribbon-like inclusions. Influence of connection between inclusions and their quantity on stress-deformed state elastic space has been analyzed on the example collinear inclusions. Jump of stress and stress intensity factors in the inclusions tips are calculated, diagrams of displacement of composite are shown. Conclusion about using reciprocally unmoved reinforced elements in the structure composites were made.

Keywords: elastic body, longitudinal shear, inclusion, jump of stress, intensity factor.

Кундрат А. М., к.ф.-м.н., доцент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО ТЕЛА С СИСТЕМАМИ КОЛЛИНЕАРНЫХ АРМИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗНОГО КОЛИЧЕСТВА

В условиях антиплоской деформации рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругого массива с системами жестких ленточных включений. Исследовано влияние взаимосвязанности и количества включений на примере их коллинеарного расположения. Вычислены скачки напряжений и коэффициенты интенсивности напряжений в окрестностях вершин включений, построены графики перемещений композита. Сделаны выводы об использовании связанных взаимонеподвижных армированных элементов в структуре композитов.

Ключевые слова: упругое тело, продольный сдвиг, включение, скачок напряжений, коэффициент интенсивности.
