УДК 519.2 https://doi.org/10.31713/ve420249
JEL: C13

Кушнір О. О. [1; ORCID ID: 0009-0001-3853-3318],
к.ф.-м.н., доцент,
Кушнір В. П. [1; ORCID ID: 0009-0005-7934-2074],
к.ф.-м.н.,
Кушнір І. О. [1; ORCID ID: 0009-0002-1776-9169],
здобувач вищої освіти другого (магістерського) рівня

[1]*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне*

ЕКОНОМЕТРІЯ: ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ПРОГРАМ ДЛЯ ПОБУДОВИ ТОЧНИХ НАДІЙНИХ ІНТЕРВАЛІВ ДЛЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЇ МЕТОДОМ КЛОППЕРА – ПІРСОНА

У статті наведено деякі методи побудови надійних інтервалів для ймовірності події (або параметра біномного розподілу). Обґрунтовано переваги використання методу Клоппера – Пірсона. Показано зв'язок останнього із точним розв'язком задачі перевірки гіпотези про значення ймовірності. Пояснено, як будувати надійні інтервали Клоппера – Пірсона за допомогою вільної програми з відкритим кодом LibreOffice Calc. Підкреслено точність отриманих результатів при довільних обсягах вибірки.

***Ключові слова**:* надійний інтервал; параметр біномного розподілу; метод Клоппера – Пірсона; бета-розподіл; LibreOffice Calc.

Нехай у n незалежних випробуваннях випадкова подія відбулася k разів. Потрібно оцінити ймовірність p цієї події – параметр біномного розподілу.

Відносна частота $\gamma = k/n$ є незсуненою, сильно консистентною та асимптотично нормальною точковою оцінкою ймовірності.

Але щодо отримання інтервальної оцінки ймовірності події є різні підходи, які називаються також методами. Більшість із них ґрунтуються на апроксимації біномного розподілу нормальним, згідно інтегральної граничної теореми Муавра – Лапласа [1, С. 40]. Для побудови двобічного інтервалу надійності γ використовується квантиль стандартного нормального розподілу $N(0,\ 1)$ рівня $(1+\gamma)/2$, який позначимо u.

Ось деякі інтервали з наведених у статті з Вікіпедії [2]:

1. Інтервал Вальда – найпростіший. Уперше був запропонований Лапласом у 1812-му році [3, С. 283]:

$$\left(v - u\sqrt{\frac{v(1-v)}{n}} \quad , \quad v + u\sqrt{\frac{v(1-v)}{n}} \right).$$

2. Метод Вільсона полягає в розв'язуванні квадратного рівняння відносно ймовірності події [4]:

$$\left(\frac{v + \frac{u^2}{2n} - u\sqrt{\frac{v(1-v)}{n} + \frac{u^2}{4n^2}}}{1 + u^2/n} \quad , \quad \frac{v + \frac{u^2}{2n} + u\sqrt{\frac{v(1-v)}{n} + \frac{u^2}{4n^2}}}{1 + u^2/n} \right).$$

3. Метод Агресті – Коула [5] дає приблизно такий же результат, як і метод Вільсона, але він виглядає, як інтервал Вальда.

Якщо позначити перший доданок інтервалу методу Вільсона

$$\tilde{v} = \frac{v + \frac{u^2}{2n}}{1 + \frac{u^2}{n}},$$

що відповідає заміні *n* на $\tilde{n} = n + u^2$, а *k* на $\tilde{k} = k + u^2/2$, то інтервал Агресті – Коула матиме вигляд

$$\left(\tilde{v} - u\sqrt{\frac{\tilde{v}(1-\tilde{v})}{\tilde{n}}} \quad , \quad \tilde{v} + u\sqrt{\frac{\tilde{v}(1-\tilde{v})}{\tilde{n}}} \right).$$

Як зауважили Браун, Кей і Дасгупта [6], для побудови інтервалу надійності γ=0,9545 це рівносильно тому, щоб збільшити на 2 кількість успіхів та кількість промахів, а потім використати інтервал Вальда.

4. Метод арксинуса (кутового перетворення Фішера) [7]:

$$\left(sin^2\left(arcsin\sqrt{v} - \frac{u}{2\sqrt{n}} \right), \quad sin^2\left(arcsin\sqrt{v} + \frac{u}{2\sqrt{n}} \right) \right).$$

Є й інші формули, які уточнюють наведені за допомогою різних поправок. Однак усі вони мають спільні недоліки:

1) очікується досить великий обсяг вибірки;
2) *p* не повинно бути близьким до 0 чи 1;
3) їх надійність може виявитися меншою від заданого γ.

З іншого боку, у 1934-му році Клоппер та Пірсон запропонували будувати надійні інтервали для ймовірності події, не апроксимуючи біномний розподіл нормальним [8]. Проте цей метод не набув поширення через складність обчислень. Але тепер, у зв'язку з сучасними обчислювальними можливостями, ця проблема вже не є актуальною. Тому чимало науковців використовують метод Клоппера – Пірсона побудови надійних інтервалів для параметра біномного розподілу. Зокрема в Україні ці інтервали використовуються в наукових працях медичного спрямування, наприклад [9, С. 3].

При великих обсягах вибірок усі надійні інтервали є приблизно однакові, тому немає принципової різниці, який із них використовувати. Перевагою використання інтервалів Клоппера – Пірсона є простота обчислень за умови використання комп'ютерних програм, зокрема LibreOffice Calc.

Слід зауважити, що серед статистиків є і противники методу Клоппера – Пірсона [5]. Використовуючи баєсовий підхід, методом Монте-Карло вони показали, що надійні інтервали Клоппера – Пірсона є ширшими від інших. Це й не дивно, адже на відміну від інших, інтервали Клоппера – Пірсона гарантують надійність, не меншу від γ за будь-яких обсягів вибірки і при будь-яких p. А при баєсовому підході будуються не надійні, а імовірні інтервали (англ. *credible interval*) [10].

Крім того, надійні інтервали Клоппера – Пірсона природним чином узгоджені із задачею перевірки гіпотези про значення ймовірності, точний розв'язок якої, як показано нижче, не потребує нормального наближення.

Нехай потрібно перевірити статистичну гіпотезу

H: $p=p_0$ при однобічній альтернативі K: $p>p_0$.

За лемою Неймана – Пірсона [1, С. 427], рівномірно найпотужнішим критерієм (якщо не використовувати *рандомізовані* критерії) у цьому випадку є біномний m-критерій: альтернативна гіпотеза K приймається, коли кількість успіхів k у n випробуваннях буде не меншою від m.

Критичне значення m вибирається найменше з таких, що сума ймовірностей m і більше успіхів у n випробуваннях з імовірністю успіху p_0 не перевищила рівня значущості α:

$$C_n^m p_0^m (1-p_0)^{n-m} + C_n^{m+1} p_0^{m+1} (1-p_0)^{n-m-1} + \dots + p_0^n \le \alpha,$$

тобто

$$(1-p_0)^n + np_0(1-p_0)^{n-1} + \dots + C_n^{m-1} p_0^{m-1} (1-p_0)^{n-m+1} \ge 1-\alpha.$$

Це підводить нас до однобічного надійного інтервалу для p методом Клоппера – Пірсона (p_1, 1). Для інтервалу надійності γ слід вибрати p_1 таким, щоб

$$\left(1-p_1\right)^n+np_1\left(1-p_1\right)^{n-1}+\cdots+C_n^{k-1}p_1^{k-1}\left(1-p_1\right)^{n-k+1}=\gamma.$$

Справді, при α=1–γ у цьому випадку для будь-якого $p_0>p_1$ критичне значення $m>k$, отже, гіпотеза $p=p_0$ буде прийнята, а при $p_0\leq p_1$: $m\leq k$ — гіпотеза $p=p_0$ буде відкинута.

Аналогічно у випадку

$$C_n^{k+1}p_2^{k+1}\left(1-p_2\right)^{n-k-1}+C_n^{k+2}p_2^{k+2}\left(1-p_2\right)^{n-k-2}+\cdots+p_2^n=\gamma$$

інший однобічний інтервал надійності γ має вигляд (0, p_2).

Але як виразити з цих рівностей p_1, p_2? На допомогу приходить бета-розподіл з параметрами a, b зі щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ aC_{a+b-1}^{a}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Функція бета-розподілу позначається

$$F(x)=I_x(a,b).$$

При спробі знайти її методом інтегрування частинами отримуємо формулу

$$\sum_{i=k+1}^{n}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}=I_p(k+1,n-k).$$

Отже, шукане p_2 для інтервалу (0, p_2) є квантилем бета-розподілу з параметрами k+1, n–k рівня γ.

В програмі LibreOffice Calc воно знаходиться за допомогою функції $p_2=BETA.INV(\gamma;k+1;n-k)$.

Далі знаходимо

$$\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}=1-I_p(k+1,n-k),$$

отже,

$$\sum_{i=0}^{k-1}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}=1-I_p(k,n-k+1).$$

При $p=p_1$ ця величина має дорівнювати γ.

Тому p_1 є квантилем бета-розподілу з параметрами k, n–k+1 рівня 1–γ.

В програмі LibreOffice Calc воно знаходиться за допомогою функції $p_1=BETA.INV(1-\gamma;k;n-k+1)$.

Для побудови двобічного надійного інтервалу (*l*, *u*) потрібно розв'язати рівняння Клоппера – Пірсона

$$\sum_{i=k}^{n} C_n^i l^i (1-l)^{n-i} = \frac{1-\gamma}{2}; \quad \sum_{i=0}^{k} C_n^i u^i (1-u)^{n-i} = \frac{1-\gamma}{2}.$$

Ці рівняння можна написати у вигляді:

$$I_l(k, n-k+1) = \frac{1-\gamma}{2}; \; I_u(k+1, n-k) = \frac{1+\gamma}{2}.$$

Тоді за допомогою комп'ютерної програми LibreOffice Calc знаходимо

$$l = BETA.INV((1-\gamma)/2; k; n-k+1), \quad u = BETA.INV((1+\gamma)/2; k+1; n-k).$$

Слід зауважити, що в програмі LibreOffice Calc значення оберненої бета-функції знаходяться дуже точно і достатньо швидко і при малих, і при досить великих обсягах вибірок.

Отже, перевагами використання надійних інтервалів Клоппера – Пірсона за допомогою вільної програми з відкритим кодом LibreOffice Calc є простота, універсальність, точність обчислень та гарантована надійність.

1. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика : посібник. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. 504 с. URL: https://probability.knu.ua/userfiles/kmv/VPS_Pv.pdf (дата звернення: 14.12.2024). **2.** Binomial proportion confidence interval. *In* Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Binomial_proportion_confidence_interval&oldid=1263194247 (дата звернення: 15.12.2024). **3.** Laplace P. S. Théorie analytique des probabilités. Mme. Ve Courcier. 1820. URL: https://archive.org/details/theorieanaldepro00laplrich/page/n13/mode/2up (дата звернення: 15.12.2024). **4.** Wilson E. B. Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference. *Journal of the American Statistical Association*. 1927. Vol. 22(158). P. 209–212. URL: https://doi.org/10.2307/2276774 (дата звернення: 15.12.2024). **5.** Agresti A., & Coull B. A. Approximate Is Better than «Exact» for Interval Estimation of Binomial Proportions. *The American Statistician*. 1998. Vol. 52(2). P. 119–126. URL: https://doi.org/10.2307/2685469 (дата звернення: 15.12.2024). **6.** Brown L. D., Cai T. T., & DasGupta A. Interval Estimation for a Binomial Proportion. *Statistical Science*. 200). Vol. 16(2). P. 101–117. URL: https://www.jstor.org/stable/2676784 (дата звернення: 15.12.2024). **7.** Holland S. Transformations of proportions and percentages. UGA Stratigraphy Lab. Retrieved January 16, 2025. URL: http://stratigrafia.org/8370/rtips/proportions.html (дата звернення: 15.12.2024). **8.** Clopper C. J., & Pearson E. S. The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial. *Biometrika*. 1934. Vol. 26(4). P. 404–413. URL: https://doi.org/10.2307/2331986 (дата звернення: 15.12.2024). **9.** Тутченко М. І., Бесединський М. С., Рудик Д. В., Чуб С. Л., Клюзко І. В., Рощин Г. Г. Спонтанний бактеріальний перитоніт у пацієнтів з портальною гіпертензією. *Emergency Medicine*. 2024. Том 20. № 4. С. 274–280. DOI: 10.22141/2224-0586.20.4.2024.1714.

10. Імовірний інтервал. Вікіпедія: вільна енциклопедія. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Імовірний_інтервал (дата звернення: 16.12.2024).

REFERENCES:

1. Kartashov M. V. Imovirnist, protsesy, statystyka : posibnyk. Kyiv : Vydavnycho-polihrafichnyi tsentr «Kyivskyi universytet», 2008. 504 s. URL: https://probability.knu.ua/userfiles/kmv/VPS_Pv.pdf (data zvernennia: 14.12.2024). **2.** Binomial proportion confidence interval. *In Wikipedia*. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Binomial_proportion_confidence_interval&oldid=1263194247 (data zvernennia: 15.12.2024). **3.** Laplace P. S. Théorie analytique des probabilités. Mme. Ve Courcier. 1820. URL: https://archive.org/details/theorieanaldepro00laplrich/page/n13/mode/2up (data zvernennia: 15.12.2024). **4.** Wilson E. B. Probable Inference, the Law of Succession, and Statistical Inference. *Journal of the American Statistical Association*. 1927. Vol. 22(158). P. 209–212. URL: https://doi.org/10.2307/2276774 (data zvernennia: 15.12.2024). **5.** Agresti A., & Coull B. A. Approximate Is Better than «Exact» for Interval Estimation of Binomial Proportions. *The American Statistician*. 1998. Vol. 52(2). P. 119–126. URL: https://doi.org/10.2307/2685469 (data zvernennia: 15.12.2024). **6.** Brown L. D., Cai T. T., & DasGupta A. Interval Estimation for a Binomial Proportion. Statistical Science. 200). Vol. 16(2). P. 101–117. URL: https://www.jstor.org/stable/2676784 (data zvernennia: 15.12.2024). **7.** Holland S. Transformations of proportions and percentages. UGA Stratigraphy Lab. Retrieved January 16, 2025. URL: http://stratigrafia.org/8370/rtips/proportions.html (data zvernennia: 15.12.2024). **8.** Clopper C. J., & Pearson E. S. The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial. *Biometrika*. 1934. Vol. 26(4). P. 404–413. URL: https://doi.org/10.2307/2331986 (data zvernennia: 15.12.2024). **9.** Tutchenko M. I., Besedinskyi M. S., Rudyk D. V., Chub S. L., Kliuzko I. V., Roshchyn H. H. Spontannyi bakterialnyi perytonit u patsiientiv z portalnoiu hipertenziieiu. *Emergency Medicine*. 2024. Tom 20. № 4. S. 274–280. DOI: 10.22141/2224-0586.20.4.2024.1714. **10.** Imovirnyi interval. *Vikipediia* : vilna entsyklopediia. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Imovirnyi_interval (data zvernennia: 16.12.2024).

Kushnir O. O. [1; ORCID ID: 0009-0001-3853-3318],
Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.),
Associate Professor,
Kushnir V. P. [1; ORCID ID: 0009-0005-7934-2074],
Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.),
Kushnir I. O. [1; ORCID ID: 0009-0002-1776-9169],
Master

[1]*National University of Water and Environmental Engineering, Rivne*

ECONOMETRICS: USING COMPUTER PROGRAMS TO COMPUTE EXACT BINOMIAL PROPORTION CONFIDENCE INTERVALS BY THE CLOPPER – PEARSON METHOD

The article cites several methods of computing confidence intervals for the probability of an event (or a parameter of the binomial distribution), which are based on the global form of the de Moivre – Laplace theorem and therefore assume a sufficiently large sample size, namely Wald interval, Wilson score interval, Agresti – Coull interval, and the arcsine transformation.

The advantages of using the exact Clopper – Pearson method, which does not rely on approximating the binomial distribution with the normal distribution, are formulated and substantiated. Reservations about the Clopper – Pearson method expressed by some authors, who used Bayesian inference and therefore actually considered credible intervals instead of confidence intervals, are cited.

The relationship between the Clopper – Pearson method of computing one-sided confidence intervals for the binomial distribution parameter and the exact solution (using the Neyman – Pearson lemma) to the problem of testing a hypothesis about a probability value, is given.

The Clopper – Pearson equations are solved using a well-known relationship between the binomial and the beta distribution functions.

Calculating one-sided and two-sided Clopper – Pearson confidence intervals using the inverse beta function in the free and open-source application LibreOffice Calc, is detailed. For arbitrary sample size, the inverse beta function is computed with high accuracy in this application, which confirms the generality of the approach proposed in the article.

Keywords: confidence interval; parameter of the binomial distribution; Clopper – Pearson method; beta distribution; LibreOffice Calc.

Отримано: 17 грудня 2024 року
Прорецензовано: 22 грудня 2024 року
Прийнято до друку: 20 грудня 2024 року